

**Übungen zur Funktionentheorie I**  
– Zusatzblatt –  
Abgabe Dienstag, 14.07.2009, 10 Uhr s.t.

Die Punkte dieses Blattes gelten als Bonuspunkte.

**Aufgabe 44** (*Möbiustransformationen*). (4 Punkte)

Zeigen Sie: Bildet eine Möbiustransformation Geraden auf Geraden ab, so werden auch Kreise auf Kreise abgebildet.

**Aufgabe 45** (*Poincaré Halbebene*). (4 Punkte)

In der Vorlesung wurde das *Poincaré-Modell der Geometrie* beschrieben. Mittels der Cayley-Abbildung  $c : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}$  lässt sich dieses Modell vom Einheitskreis  $\mathbb{E}$  auf die obere Halbebene  $\mathbb{H}$  übertragen. Sei  $d_h : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$  die hyperbolische Metrik in  $\mathbb{E}$ , dann definiert

$$d_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}, (z, w) \mapsto d_{\mathbb{H}}(z, w) := d_h(c(z), c(w))$$

eine Metrik auf  $\mathbb{H}$  (dies ist nicht zu zeigen). Bestimmen Sie:

- a) den Abstand  $d_{\mathbb{H}}(ix, iy)$  für  $x, y \in \mathbb{R}_+$ ,
- b) die geodätischen Linien in  $\mathbb{H}$ .

**Aufgabe 46.** (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass es keine biholomorphe Abbildung von  $B_1(0)$  auf  $\mathbb{C}$  geben kann.