Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier

Sommersemester 2010

Komplexe und harmonische Analysis

– Blatt 1 –

Abgabe Dienstag, 27.04.2010, 10 Uhr s.t.

Aufgabe 1. (4 Punkte)

a) Konstruiere eine C^∞-Funktion $g : \mathbb{R} \to [0,1]$, für die

$$g(x) = 0 \quad \text{für } x < 0 \quad \text{und} \quad g(x) = 1 \quad \text{für } x > 1$$

gilt.
Hinweis: Betrachte zunächst die Funktion $f(x) = \exp(-1/x^2)$ für $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

b) Sei $B_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$. Konstruiere eine C^∞-Funktion $h : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, die auf $B_1(0)$ konstant 1 ist und auf $\mathbb{R}^n \setminus B_2(0)$ verschwindet.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Definiere wie in der Vorlesung das Produkt

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 + a_1 b_2)$$

auf der offenen Menge $\Omega = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^4$. Wir können C^∞-Kurven $\gamma(t) = (a(t), b(t))$ in Ω betrachten, und den zugehörigen Tangentialvektor

$$\dot\gamma(0) = (\dot a(0), \dot b(0)) = \left(\tfrac{da}{dt}(0), \tfrac{db}{dt}(0)\right) \in \mathbb{C}^2 .$$

Seien nun zwei Kurven $\gamma_i(t) = (a_i(t), b_i(t))$ $(i = 1, 2)$ gegeben mit $\gamma_i(0) = (1, 0)$ (neutrales Element) und Tangentialvektor $\dot\gamma_i(0) = (\alpha_i, \beta_i)$. Berechne die Tangentialvektoren

$$\tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma_1(t)\gamma_2(t) \quad \text{bzw.} \quad \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} \tfrac{d}{ds}\Big|_{s=0} \left(\gamma_1(t)\gamma_2(s)\gamma_1(t)^{-1}\gamma_2(s)^{-1}\right)$$

und drücke sie durch (α_1, β_1) und (α_2, β_2) aus.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Sei $A \subset \mathbb{C}^\times$ eine multiplikative Untergruppe und $B \subset \mathbb{C}$ eine additive Untergruppe mit $A \cdot B \subset B$. Definiere

$$\Gamma_{A,B} := \{T_{a,b} \mid a \in A, b \in B\} ,$$

wobei $T_{a,b}(z) := az + b$.

a) Beweise, dass $\Gamma_{A,B}$ eine Gruppe (affiner Transformationen) ist. Wir nennen $\Gamma_{A,B}$ „echt“, falls $A \neq \{1\}$ und $B \neq \{0\}$ ist, d.h. $\Gamma_{A,B}$ besteht nicht nur aus Translationen ($A = \{1\}$) bzw. Drehstreckungen ($B = \{0\}$).

b) Gebe Beispiele an von echten Untergruppen $\Gamma_{A,B}$, mit (reeller) Dimension $0, 1, 2, 3$. Dabei bedeutet „Dimension“ die Anzahl der unabhängigen reellen Parameter, nulldimensional bedeutet „diskret“.

c) Kann eine echte Untergruppe $\Gamma_{A,B}$ endlich sein?

Aufgabe 4. (4 Punkte)

a) Prüfe, ob die folgenden Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind:

$$\alpha : \mathrm{Aff}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C},\ g \mapsto g(0)\ , \quad \beta : \mathrm{Aff}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^\times,\ g \mapsto g'(0)\ .$$

b) Konstruiere eine (möglicherweise endliche) Untergruppe von $\mathrm{Aff}(\mathbb{C})$, die nicht von der Form $\Gamma_{A,B}$ ist (siehe Aufgabe 3).