Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier

Sommersemester 2010

Komplexe und harmonische Analysis

– Blatt 6 –

Abgabe **Montag, 7.6.2010** im Tutorium

Aufgabe 21. (4 Punkte)

In der Vorlesung waren „Kreise“ in $\overline{\mathbb{C}}$ mittels einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit $A^* = A$, $\det A < 0$ durch

$$C_A = \left\{ z \in \overline{\mathbb{C}} \,\middle|\, (\overline{z}, 1) A \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

beschrieben worden.

a) Zeige, dass jede solche Matrix A einen (nicht-leeren) Kreis bzw. Gerade beschreibt.

b) Für welche Matrizen A erhält man eine Gerade (d.h. $\infty \in C$)?

c) Für welche Matrizen A erhält man einen Großkreis?

Aufgabe 22. (4 Punkte)

Für $n \geq 2$ sei $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$ der projektive Raum aller Geraden $\mathbb{C}\cdot v$, mit $v = (v_0, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Für $0 \leq i \leq n$ sei

$$U_i := \left\{ \mathbb{C} \cdot v \,\middle|\, v \ni \mathbb{C}^{n+1},\ v_i \neq 0 \right\} .$$

a) Definiere, analog zur Vorlesung ($n = 1$), eine bijektive „Karte“

$$\sigma_i : \mathbb{C}^n \to U_i .$$

b) Bestimme die durch das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^n \arrow[dr, dashed, "\sigma_i"] \arrow[dd, "\sigma_i^j"'] & \\
& U_i \cap U_j \\
\mathbb{C}^n \arrow[ur, dashed, "\sigma_j"'] &
\end{tikzcd}$$

definierten Übergangsfunktionen σ_i^j sowie den zugehörigen Definitionsbereich und Bildbereich. In welchem Sinne sind die σ_i^j „biholomorph“?

Aufgabe 23. (4 Punkte)
Für die „Planck'sche Konstante" $\hbar > 0$ besteht der „modifizierte" Fock-Raum $H^2_\hbar(\mathbb{C})$ aus den holomorpen Funktionen $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$\int_{\mathbb{C}} dz\, e^{-|z|^2/\hbar} |\psi(z)|^2 < +\infty$$

a) Bestimme eine Konstante $c_\hbar > 0$, so dass

$$d\mu_\hbar(z) = c_\hbar \cdot e^{-|z|^2/\hbar} dz$$

ein W-Maß ist.

b) Für das innere Produkt

$$\langle \psi_1 \,|\, \psi_2 \rangle_\hbar := c_\hbar \int_{\mathbb{C}} dz\, e^{-|z|^2/\hbar} \overline{\psi_1(z)} \psi_2(z)$$

berechne $\langle z^n \,|\, z^n \rangle_\hbar$ $(n \geq 0)$, und bestimme eine ONB von $H^2_\hbar(\mathbb{C})$.

c) Bestimme die reproduzierende Kernfunktion $K_\hbar(z, w)$ von $H^2_\hbar(\mathbb{C})$.

Aufgabe 24. (4 Punkte)
Sei H ein separabler $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $\pi : G \to U(H)$ eine unitäre Darstellung. Ein linearer Operator $T : H \to H$ heißt *Hilbert-Schmidt Operator*, falls

$$\operatorname{Spur} T^*T = \sum_n \langle T\phi_n \,|\, T\phi_n \rangle < +\infty\ .$$

Hier ist (ϕ_n) eine beliebige ONB von H. Der Raum $\mathcal{L}^2(H)$ aller Hilbert-Schmidt Operatoren ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\langle S \,|\, T \rangle = \operatorname{Spur} S^*T = \sum_n \langle S\phi_n \,|\, T\phi_n \rangle$$

(ohne Beweis). Zeige, dass

$$\tilde{\pi}(g)T := \pi(g) T \pi(g)^{-1}$$

eine unitäre Darstellung von G auf $\mathcal{L}^2(H)$ definiert.
Hinweis: Für HS-Operatoren gelten die üblichen Eigenschaften einer Spur, oder man benutze die Tatsache, dass die obigen Reihen unabhängig von der Auaswahl der ONB (ϕ_n) ist.