

**Komplexe und harmonische Analysis**  
 – Blatt 6 –  
 Abgabe **Montag, 7.6.2010** im Tutorium

**Aufgabe 21.** (4 Punkte)  
 In der Vorlesung waren „Kreise“ in  $\overline{\mathbb{C}}$  mittels einer Matrix  $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$  mit  $A^* = A$ ,  $\det A < 0$  durch

$$C_A = \left\{ z \in \overline{\mathbb{C}} \mid (\bar{z}, 1) A \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

beschrieben worden.

- a) Zeige, dass jede solche Matrix  $A$  einen (nicht-leeren) Kreis bzw. Gerade beschreibt.
- b) Für welche Matrizen  $A$  erhält man eine Gerade (d.h.  $\infty \in C$ )?
- c) Für welche Matrizen  $A$  erhält man einen Großkreis?

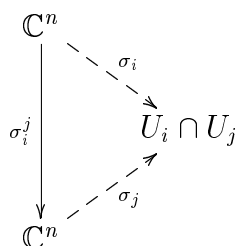
**Aufgabe 22.** (4 Punkte)  
 Für  $n \geq 2$  sei  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$  der projektive Raum aller Geraden  $\mathbb{C} \cdot v$ , mit  $v = (v_0, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Für  $0 \leq i \leq n$  sei

$$U_i := \{ \mathbb{C} \cdot v \mid v \in \mathbb{C}^{n+1}, v_i \neq 0 \} .$$

- a) Definiere, analog zur Vorlesung ( $n = 1$ ), eine bijektive „Karte“

$$\sigma_i : \mathbb{C}^n \rightarrow U_i .$$

- b) Bestimme die durch das kommutative Diagramm



definierten Übergangsfunktionen  $\sigma_i^j$  sowie den zugehörigen Definitionsbereich und Bildbereich. In welchem Sinne sind die  $\sigma_i^j$  „biholomorph“?

**Aufgabe 23.**

(4 Punkte)

Für die „Planck'sche Konstante“  $\hbar > 0$  besteht der „modifizierte“ Fock-Raum  $H_{\hbar}^2(\mathbb{C})$  aus den holomorphen Funktionen  $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\int_{\mathbb{C}} dz e^{-|z|^2/\hbar} |\psi(z)|^2 < +\infty$$

a) Bestimme eine Konstante  $c_{\hbar} > 0$ , so dass

$$d\mu_{\hbar}(z) = c_{\hbar} \cdot e^{-|z|^2/\hbar} dz$$

ein W-Maß ist.

b) Für das innere Produkt

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle_{\hbar} := c_{\hbar} \int_{\mathbb{C}} dz e^{-|z|^2/\hbar} \overline{\psi_1(z)} \psi_2(z)$$

berechne  $\langle z^n | z^n \rangle_{\hbar}$  ( $n \geq 0$ ), und bestimme eine ONB von  $H_{\hbar}^2(\mathbb{C})$ .

c) Bestimme die reproduzierende Kernfunktion  $K_{\hbar}(z, w)$  von  $H_{\hbar}^2(\mathbb{C})$ .

**Aufgabe 24.**

(4 Punkte)

Sei  $H$  ein separabler  $\mathbb{C}$ -Hilbertraum und  $\pi : G \rightarrow U(H)$  eine unitäre Darstellung. Ein linearer Operator  $T : H \rightarrow H$  heißt *Hilbert-Schmidt Operator*, falls

$$\text{Spur } T^*T = \sum_n \langle T\phi_n | T\phi_n \rangle < +\infty .$$

Hier ist  $(\phi_n)$  eine beliebige ONB von  $H$ . Der Raum  $\mathcal{L}^2(H)$  aller Hilbert-Schmidt Operatoren ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\langle S | T \rangle = \text{Spur } S^*T = \sum_n \langle S\phi_n | T\phi_n \rangle$$

(ohne Beweis). Zeige, dass

$$\tilde{\pi}(g)T := \pi(g)T\pi(g)^{-1}$$

eine unitäre Darstellung von  $G$  auf  $\mathcal{L}^2(H)$  definiert.

Hinweis: Für HS-Operatoren gelten die üblichen Eigenschaften einer Spur, oder man benutze die Tatsache, dass die obigen Reihen unabhängig von der Auswahl der ONB  $(\phi_n)$  ist.