Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. H. Upmeier Sommersemester 2010

Komplexe und harmonische Analysis
– Blatt 9 –
Abgabe Donnerstag, 24.6.2010, 10 Uhr s.t.

Aufgabe 31. (4 Punkte)
Für $z \in \mathbb{B}$ (Einheitskreis) wird der Tangentialraum $T_z(\mathbb{B})$ mit $\mathbb{C}$ identifiziert. Die zugehörige "Tangential-Metrik" ist

$$(u|v)_z := \frac{u\overline{v}}{(1-|z|^2)^2},$$

wobei $u, v \in T_z(\mathbb{B})$. Betrachte die Moebius-Transformation $g : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ $(g \in SU_{1,1}(\mathbb{C}))$ und beweise die Formel

$$(g'(z)\, u \,|\, g'(z)\, v)_{g(z)} = (u|v)_z.$$

Aufgabe 32. (4 Punkte)
Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{B}$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Kurve mit Tangentialvektor $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}(\mathbb{B})$. Wie üblich heißt

$$L(\gamma) := \int_a^b dt\, \|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)}$$

die *Bogenlänge* von γ. Daher sei $\|u\|_z := (u|u)_z^{1/2}$.

(i) Beweise, dass

$$L(g \circ \gamma) = L(\gamma)$$

für alle $g \in SU_{1,1}(\mathbb{C})$ gilt.

(ii) Berechne die Bogenlänge für

$$\gamma = \text{Liniensegment von } 0 \text{ bis } a \in \mathbb{B}$$

und

$$\gamma = \text{Kreisbogensegment mit Radius } R \text{ und Winkel } 0 \le \alpha < \beta \le 2\pi.$$

Aufgabe 33. (4 Punkte)
Beweise mit der Trafoformel: Die "hyperbolische Fläche"

$$A(D) := \iint_D \frac{d\overline{z}\, dz}{2\pi i}\, (1-|z|^2)^{-2}$$

einer (offenen) Teilmenge $D \in \mathbb{B}$ ist invariant unter $g \in SU_{1,1}(\mathbb{C})$, d.h.

$$A(g(D)) = A(D).$$

Aufgabe 34. (4 Punkte)
Mittels der Cayley-Transformation $c : \mathbb{B} \to \mathbb{H}$ (obere Halbebene), gegeben durch

$$w = c(z) = i\,\frac{1+z}{1-z}$$

können die Begriffe der Tangentialmetrik, hyperbolische Bogenlänge von Kurven in $\mathbb{H}$ sowie hyperbolischer Flächeninhalt von offenen Mengen $D \subset \mathbb{H}$ übertragen werden. Bestimme die exakten Formeln und beweise die Invarianz unter Möbius-Transformationen von $g : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ mit $(g \in SL_2(\mathbb{R}))$.