Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. J. Hinz

Wintersemester 2008/09

Übungen zur Linearen Algebra I

– Blatt 11 –

Abgabetermin: Dienstag, 20.1.2009, 9.00 - 9.10 Uhr (vor der Vorlesung)

1. Aufgabe (2+2=4 Punkte) : Es seien $V := \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ und $U := \{f \in V\,;\ f(k) \neq 0$ für höchstens endlich viele $k \in \mathbb{N}\}$ ein Unterraum von V . Zeigen Sie:

a) Ist $g \in V$, so wird durch

$$F(g)(f) \ := \ \sum_{k=1}^{\infty} f(k)\, g(k)$$

eine Linearform $F(g)$ auf U definiert. Die Abbildung $G : V \to U^*$ mit $G(g) := F(g)$ ist ein Monomorphismus.

b) $G(U)$ ist ein Unterraum von $G(V)$ und damit von U^* . Dieser Unterraum kann nicht Annulator eines Unterraumes von U sein.

2. Aufgabe (2 Punkte) : Es seien V, W K-Vektorräume mit $\dim V = n$, $\dim W = m$, $f \in L(V, W)$ und $f^* \in L(W^*, V^*)$ die zu f duale Abbildung. Zeigen Sie:

a) f injektiv $\iff$ f^* surjektiv ;

b) f surjektiv $\iff$ f^* injektiv .

3. Aufgabe (4 Punkte) : Es seien K ein Körper, U ein Unterraum von K^n und $a_0 \in K^n$. Zeigen Sie: Es gibt ein lineares Gleichungssystem mit n Unbekannten, dessen Lösungsmenge mit $a_0 + U$ übereinstimmt. Bestimmen Sie ein solches Gleichungssystem für $K = \mathbb{R}$, $n = 4$,

$$a_0 \ = \ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad U \ = \ \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

4. Aufgabe (2+2=4 Punkte) : Geben Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungssysteme an:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -1 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ x_1 & & & + & x_3 & & & = & 1 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & \alpha x_2 & + & \alpha^2 x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & \beta x_2 & + & \beta^2 x_3 & = & 0 \end{array} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})\,.$$