Fachbereich Mathematik und Informatik — Wintersemester 2008/09

Prof. Dr. J. Hinz

Übungen zur Linearen Algebra I

– Blatt 8 –

Abgabetermin: Dienstag, 9.12.2008, 9.00 - 9.10 Uhr (vor der Vorlesung)

1. Aufgabe (2+2+1=5 Punkte) : Die Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$f\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} 4\alpha_1 + 4\alpha_2 + 5\alpha_3 + 3\alpha_4 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 \\ -3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 5\alpha_3 - 6\alpha_4 \end{pmatrix} .$$

Setzen Sie (ohne Beweis) voraus, dass f linear ist.

a) Bestimmen Sie eine Basis von Kern f, und berechnen Sie Rang f .

b) Bestimmen Sie eine Basis von Bild f. $\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}\right)$

c) Ist f injektiv, surjektiv oder bijektiv?

2. Aufgabe (4 Punkte) : Es seien V ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $f \circ f = f$. Zeigen Sie:

a) $V = \text{Kern}\, f \oplus \text{Bild}\, f$.

b) f surjektiv $\iff$ f injektiv $\iff$ $f = id_V$ (Ringschluss !) .

3. Aufgabe (2+2=4 Punkte) : Es seien $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis des K-Vektorraums V , $E = \{w_1, \dots, w_n\}$ ein System von n Vektoren im K-Vektorraum W und $f : V \to W$ die lineare Abbildung mit $f(b_j) = w_j$ für $j = 1, \dots, n$. Zeigen Sie:

- f surjektiv $\iff$ $W = \text{Lin}\, E$;
- f injektiv $\iff$ E linear unabhängig .

Hinweise zur 1-ten Teilklausur zur Linearen Algebra I :

- Die Klausur am 13. Dezember 2008 beginnt um 9.15 Uhr im Hörsaalgebäude der Universität und dauert bis 11.45 Uhr.
- Die Klausurteilnehmer werden - bezogen auf ihre Nachnamen - wie folgt auf die Hörsäle verteilt: (HG 5 - Buchstaben A bis F) , (HG 114 - Buchstaben G bis K) , (AudiMax - Buchstaben L bis Z).
- Bringen Sie bitte zur Klausur Ihre Ausweispapiere (Studentenausweis und Lichtbildausweis) und ausreichend ($>$ 15 Blatt) Papier mit.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Bearbeiten Sie bitte jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt, und versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen. Alle Lösungsvorschläge, die bewertet werden sollen, sind - nach Aufgaben sortiert - zusammen mit einem auszufüllenden Deckblatt geheftet in einem Bündel abzugeben.
- Zur Festlegung der Modulnote wird die gewichtete (1-ter Test = 80 % ; 2-ter Test = 120 %) Gesamtpunktzahl aus beiden Teilklausuren herangezogen.

Aufgaben zur Vorbereitung auf die Klausur:

1) Es seien M und N Mengen. Zeigen Sie:

$$M \subset N \quad \Longleftrightarrow \quad M \cap N = M \quad \Longleftrightarrow \quad M \cup N = N \quad .$$

2) Es seien $f : M \to N$ und $g : N \to M$ Abbildungen mit der Eigenschaft $(g \circ f)(x) = x$ für alle $x \in M$. Zeigen Sie:

- f ist injektiv, und g ist surjektiv.
- f ist genau dann surjektiv, wenn g injektiv ist.

3) Es seien $M := \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4 \in M^M$ die Abbildungen mit

$$f_1(x) = x \quad , \quad f_2(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad f_3(x) = -x \quad , \quad f_4(x) = -\frac{1}{x} \qquad \text{für alle } x \in M \quad .$$

Zeigen Sie, dass $G := \{f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4\}$ mit der Komposition von Abbildungen eine Gruppe bildet. Geben Sie die Verknüpfungstafel an.

4) Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach n:

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) \ = \ (n+1)^2 \quad , \quad n \geq 0 \quad .$$

5) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = x + iy$ und in der Form $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ dar:

$$z \ = \ \frac{(1+i)^3}{(1-i)^2} \qquad , \qquad z \ = \ i + i^2 + \cdots + i^{19} \ .$$

6) Welche der folgenden Teilmengen U_1 und U_2 sind Unterräume von $\mathbb{R}^2$?

$$U_1 \ = \ \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \alpha^2 = \beta^2 \right\} \qquad ; \qquad U_2 \ = \ \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \alpha + \beta = 0 \right\} \quad .$$

7) Es sei $V := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \ ; \ f \text{ Abbildung}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen von $[0,1] := \{\alpha \in \mathbb{R} \ ; \ 0 \leq \alpha \leq 1\}$ in $\mathbb{R}$. Welche der Teilmengen $U_1 := \{f \in V \ ; \ f(0) + f(1) = 0\}$ und $U_2 := \{f \in V \ ; \ f(0) \cdot f(1) = 0\}$ sind Unterräume von V ?

8) Es seien

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \ , \ a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} \ , \ a_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und $M = \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \subset \mathbb{R}^3$.

- Ist M linear unabhängig?
- Ist M ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$?
- Geben Sie eine Basis von $\operatorname{Lin} M$ an.

9) Welche der folgenden Abbildungen $f_{1,2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind linear? Bestimmen Sie gegebenenfalls eine Basis des Kerns.

- $f_1(a) \ := \ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 1 + \alpha_2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad ;$
- $f_2(a) := \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ .$