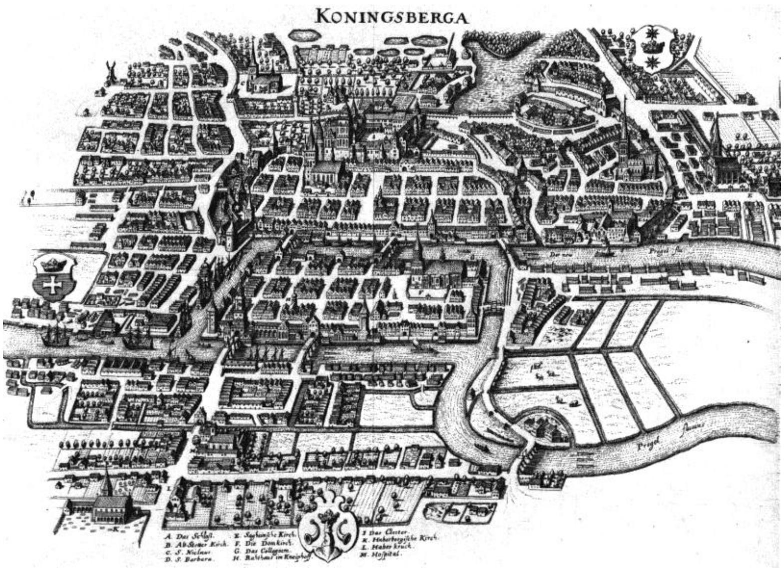
Philipps-Universität Marburg
Fachbereich 12: Mathematik und Informatik
PS: Klassische Probleme der Mathematik
Leitung: Prof. Dr. Harald Upmeier, Benjamin Schwarz
Referentin: Lene Baur
WS 2009/2010



Königsberger Brückenproblem

Ausarbeitung des Seminarvortrags vom 21.10.2009

Inhalt

Einleitung

Das Königsberger Brückenproblem ist ein Klassiker in der Mathematik. Mit seiner Lösung fand Euler im Jahr 1736 nicht nur eine Antwort auf die Frage "Kann man eine Runde durch Königsberg gehen, bei der man jede der sieben Brücken genau einmal überquert?", sondern entwickelte dazu auch Methoden, die wir heute der modernen Graphentheorie zurechnen. Da es nicht auf die präzise Lage der Brücken ankommt, sondern nur darauf, welche Brücke welche Stadtgebiete miteinander verbindet, handelt es sich nicht um ein klassisches geometrisches sondern um ein topologisches Problem.

Der Satz, den Euler für eine allgemeine Lösung des Problems formuliert, soll im Folgenden erarbeitet, verstanden und bewiesen werden. Er spielt in der Graphentheorie eine große Rolle, wenn es um die Durchlaufbarkeit eines Graphen geht.

1 Leonhard Euler (1707-1783)

Der Mathematiker der heutigen Sitzung heißt Leonard Euler. Der in Basel geborene junge Mann erhielt schon mit 18 Jahren Anerkennung für seine erste mathematische Abhandlung (über ein Brachystochronen-Problem mit Luftwiderstand). Mit 20 wurde er als eine Art wissenschaftlicher Mitarbeiter an die Universität Sankt Petersburg berufen. Er gehörte zu den produktivsten Mathematikern, befasste sich auch über sein Fachgebiet hinaus mit anderen Gebieten der Mathematik wie der mathematischen Musiktheorie, Analysis, Zahlentheorie und Geometrie.

Besonders während seiner Zeit an der Berliner Universität entwickelte er eine enorme Produktivität, die ihn zum bedeutendsten Mathematiker des 18. Jahrhunderts und zu einem der produktivsten überhaupt werden ließ. So veröffentlichte er zum Beispiel die *Eulersche Polyederformel* als eine Verallgemeinerung des Satzes von Decartes über eine Beziehung der Ecken-, Kanten- und Seitenflächen-Anzahl von Polyedern.

Die letzte Phase seines Lebens verbrachte er wieder in Petersburg, wo er trotz stark eingeschränkter Sehkraft und späterer Erblindung mit Hilfe von seinen Söhnen und mehreren jungen Sekretären weiter publizierte bis er im Alter von 76 Jahren starb.

2 Das Problem

1736 sollte Euler einer Frage auf den Grund gehen, die sich einige Menschen aus Königsberg damals stellten.

"Kann man eine Runde durch Königsberg gehen, bei der man jede Brücke genau einmal überquert?"

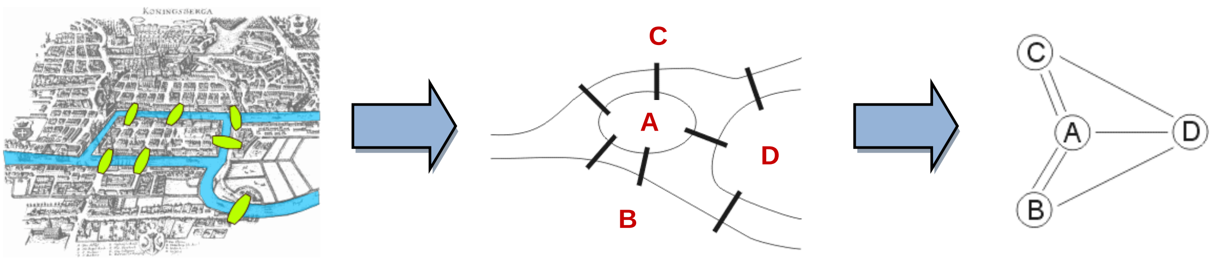
Diese Frage beantwortete er damals mit einer Methode, die eine völlig neue Disziplin begründete, nämlich die moderne **Graphentheorie**. Aber von vorne. Schauen wir uns doch Königsberg erst einmal an…

Was im 18. Jahrhundert ein süßes kleines Städtchen war, ist heute etwas größer und heißt Kaliningrad. Über den Fluss Pregel führten damals nur sieben Brücken, die die einzelnen Stadtgebiete miteinander verbanden. Über sieben Brücken wollte Euler also gehen.

3 Königsberg im Modell – eine abstrakte Darstellung als Graph

Gehen wir es langsam an. Um unser Problem nun mathematisch zu lösen, brauchen wir zunächst einmal eine **schematische Darstellung**.

In unserer Aufgabe sind die wichtigsten Objekte die **Brücken** und die **Stadtteile**. Eine Idee ist, zuerst Bezeichnungen für die Brücken einzuführen. Allerdings lässt diese Bezeichnung nicht erkennen, wie diese Brücken in einem möglichen Weg aufeinander folgen können. Da es für die Aufgabe jedoch wichtig ist, in welche Gebiete wir laufen, fangen wir mit der Bezeichnung für die Gebiete an. Wenn wir das Ganze noch ein bisschen weiter abstrahieren, erhalten wir für das Brückenproblem schließlich einen Graphen. Dabei wird jedem Stadtteil ein **Knoten** (A, B, C, D) zugeordnet. Die **Kanten** sind die 7 Brücken zwischen den Stadtteilen, die wir überqueren müssen. Damit haben wir die Karte in einen Graphen übersetzt. Bevor es weiter geht, sind allerdings zunächst einmal ein paar Vokabeln nötig.



4 Graphentheorie

Die Graphentheorie ist ein Teilgebiet der Kombinatorik, das sich mit der Charakterisierung von Graphen und der Untersuchung ihrer Eigenschaften und Anwendungsmöglichkeiten beschäftigt. Zur Definition eines Graphen schrieb Ringel 1951: "Ein Graph besteht aus einer nicht leeren Menge von Dingen erster Sorte, genannt Knotenpunkte, und einer Menge von Dingen zweiter Sorte, genannt Kanten." Ein Graph G besteht also aus einer **Knoten-** und einer **Kantenmenge**. Dabei verbindet immer eine Kante je zwei Knoten miteinander. Die Anzahl von Kanten, die von einem Knoten ausgehen, nennt man den **Grad des Knotens**.

Graph $G = (V, E)$

mit *Knotenmenge* $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$

und *Kantenmenge* $E \subseteq V \times V$.

Grad d eines Knotens v = Anzahl der Kanten, die v berühren

Ein **Kantenzug** von G ist eine Folge von Kanten (e_1, e_2, …, e_n), über die man der Reihe nach spazieren kann. Dabei ist die Länge eines Kantenzugs die Anzahl seiner Kanten. Ein Kantenzug heißt **Weg**, falls alle seine Kanten voneinander verschieden sind. Dieser wiederum wird als **geschlossen** bezeichnet, wenn Anfangs- und Endknoten gleich sind ($v_n = v_1$), man beim Spaziergang also wieder an den Ausgangspunkt zurückkommt. Ein **Kreis** ist ein geschlossener Weg.

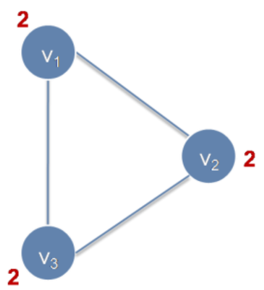
Es handelt sich um einen **zusammenhängenden** Graphen, wenn man von jedem Knoten zu jedem anderen über eine Folge von Kanten kommen kann, d.h. wenn er nicht in mehrere Komponenten zerfällt.

Beispiel eines zusammenhängenden Graphen:

$$G_1 = (V, E)$$

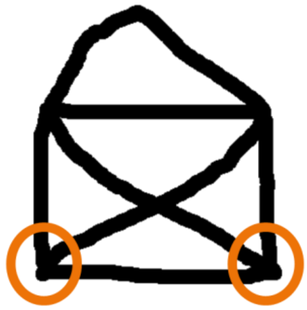
$$V = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1)\}$$



In vielen Anwendungsbeispielen stellt die Graphentheorie ein Modell dar, mit dem sich Probleme abstrakt formalisieren lassen. Unter anderem werden die Methoden der Graphentheorie deshalb bei der Planung von Verkehrsnetzen, elektrischen Netzwerken oder auch zur Darstellung und Analyse chemischer Strukturformeln genutzt.

Durchlaufbarkeit von Graphen

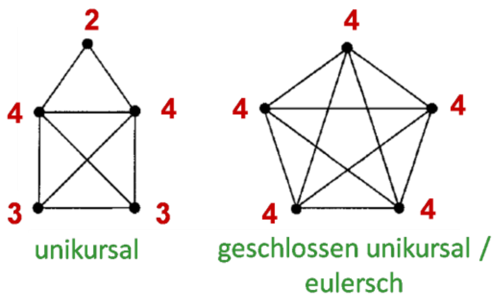


Jeder kennt das "Haus vom Nikolaus", das ohne Absetzen in einem Zug gezeichnet werden muss. Man stellt schnell fest, dass dies nur funktioniert, wenn man bei einer der unteren Ecken anfängt und dann automatisch in der anderen unteren Ecke endet. In der Graphentheorie geht es dabei um die Durchlaufbarkeit eines Graphen in einem Zug, wobei jede Kante genau einmal durchlaufen wird.

Definition: (geschlossen) unikursaler Graph

Ein zusammenhängender Graph heißt *unikursal*, wenn es einen Weg gibt, der jede Kante des Graphen genau einmal enthält. Ein derartiger Weg heißt *Eulerweg*.

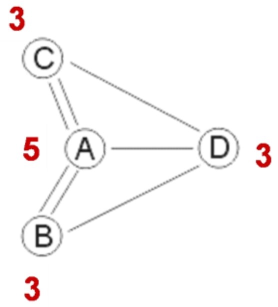
Wenn Anfangs- und Endknoten eines Eulerweges zusammenfallen, spricht man von einem *Eulerkreis*. Der Graph heißt dann *geschlossen unikursal* und wird auch "*eulerscher Graph*" genannt.



Gibt es schon Vermutungen, woran sich erkennen lässt, ob es einen Eulerkreis bzw. einen Eulerweg gibt, ohne sämtliche Möglichkeiten durchspielen zu müssen?

5 Königsberger Brückenproblem

Betrachten wir doch einmal unseren Graphen des Brückenproblems. Auch hier können wir den Grad der einzelnen Knoten angeben. Die Knoten B, C und D haben den Grad 3, A hat den Grad 5. Unsere Frage "Kann man diese Stadt nun in einem Kreis ablaufen, ja oder nein?" lässt sich nun auch in der Sprache der Graphentheorie formulieren: *Ist der Graph geschlossen unikursal bzw. eulersch?* Die Antwort wird vielen bereits bekannt sein: Nein, ist er nicht! Es gibt *keinen* Rundweg durch Königsberg, bei dem man jede Brücke nur einmal benutzt.

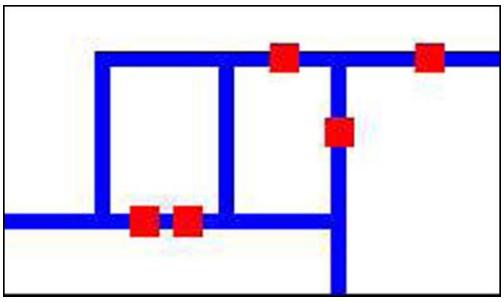


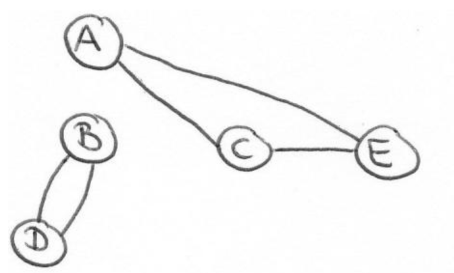
Doch Euler wäre kein Mathematiker gewesen, wenn er sich nicht hingesetzt und sich gefragt hätte: **Wie sieht das generell aus?** Er löste das Problem also nicht nur, sondern verallgemeinerte es auf beliebige Stadtpläne. In der Graphentheorie spricht man von der "unikursalen Durchlaufbarkeit eines beliebigen vorgegebenen endlichen Graphen".

Offensichtlich ist es die **Ordnung der Knoten**, die darüber entscheidet, ob Graphen unikursal sind. Knoten mit gerader Ordnung machen keine Probleme: Während des Durchlaufens kommt man in sie hinein und auch wieder heraus, wobei man jeweils zwei Kanten verbraucht, bis irgendwann alle Kanten, die in diesem Knoten enden, durchlaufen sind. Knoten mit ungerader Ordnung müssen allerdings entweder Anfangs- oder Endpunkt eines Eulerweges sein. Deshalb ist das Königsberger Brückenproblem nicht lösbar.

Unsere **Idee** ist also: *Einen Eulerkreis gibt es nur, wenn alle Knoten geraden Grad haben*!

Wie man an unserem Graphen sieht, ist diese Bedingung auf jeden Fall notwendig. Aber ist sie denn auch hinreichend? Um diese Frage zu klären, betrachten wir eine andere Stadtkarte. Die blaue Linie ist der Fluss durch die fiktive Stadt "Buxtehude", die Brücken sind in rot eingezeichnet. Bestätigt sich unsere Idee?

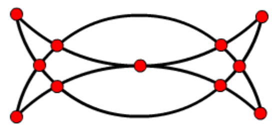




Nachdem wir auch diese Stadtkarte in einen Graphen transformiert haben, stellen wir schnell fest: Obwohl alle Knoten geraden Grad haben, ist der Graph nicht eulersch. Die Bedingung ist also *notwendig*. Erst durch den folgenden Satz, der hinzunimmt, dass der betrachtete Graph zusammenhängend sein muss, ist eine *notwenige und hinreichende Bedingung* für die Existenz eines Eulerkreises gefunden.

Satz 1: Eulerkreis (1736)

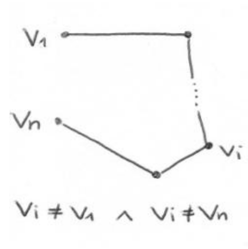
In einem *zusammenhängenden* Graphen existiert genau dann ein **Eulerkreis**, wenn **alle Knoten geraden Grad** besitzen.



Beweis

Zu zeigen: Sei G ein zusammenhängender Graph. Dann gilt:
G ist eulersch (geschlossen unikursal). $\Leftrightarrow$ Alle Knoten in G haben geraden Grad.

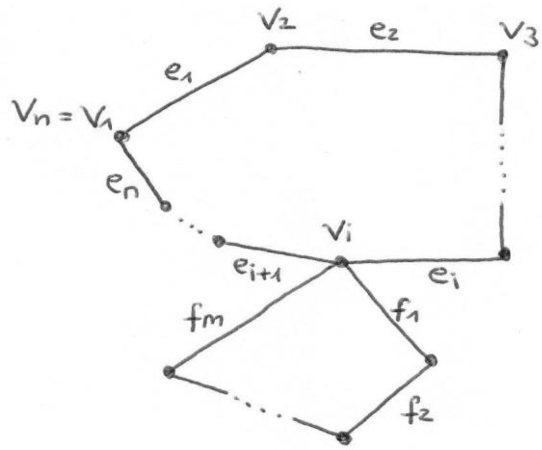
"$\Rightarrow$"
- Sei G eulersch (geschlossen unikursal).
- Dann existiert in G ein *Eulerkreis* p = (v_1, v_2, …, v_i, v_1), der alle Kanten umfasst.
- In diesem Kreis p wird jeder Knoten k-mal durchlaufen, d.h. jeweils über eine Kante erreicht und über eine weitere verlassen. Alle Knoten in p haben also geraden Grad.
- Da der Graph zusammenhängend ist, umfasst der Kreis alle Knoten. Alle Knoten in G haben daher geraden Grad.



"$\Leftarrow$"
- Sei G zusammenhängender Graph, wobei alle Knoten geraden Grad besitzen.
  Sei v_1 ein beliebiger Anfangsknoten.
- Wir durchlaufen von v_1 aus einen Weg (e_1, e_2,…) und fügen so lange Kanten an, bis wir einen Knoten v_n erreichen, von dem aus keine unbenutzte Kante mehr abgeht.
- Da v_1 und v_n nach Voraussetzung geraden Grad haben, muss der Endknoten v_n von p mit v_1 identisch sein.

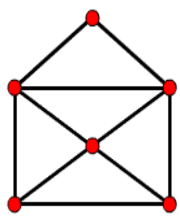
- 1. Fall: Haben mit (e_1, e_2,…, e_n) den gesamten Graphen durchlaufen. ⇨ Fertig!

  2. Fall: Haben Graphen noch nicht durchlaufen.
- Dann gibt es einen Knoten v_i, an dem ein weiterer geschlossener Weg (f_1, f_2, .., f_m) beginnt und endet, denn auch der Grad von v_i ist gerade.
- Die zusammengelegten Wege bilden wieder einen geschlossenen Weg $p = (e_1, e_2, \ldots, e_i, f_1, f_2, .., f_j, e_{i+1}, e_n)$.
- Wenn alle Kanten verwendet wurden, bricht der Prozess ab. Der Weg p ist ein Eulerkreis.
- Ein zusammenhängender Graph, in dem alle Knoten geraden Grad haben, ist geschlossen unikursal. Da v_1 beliebig war, kann jeder Knoten Anfangs- und Endknoten eines Eulerkreises sein.



Satz 2: Eulerweg

In einem *zusammenhängenden* Graphen existiert genau dann ein **Eulerweg**, wenn *zwei Knoten ungeraden* Grad haben.



Beweis:

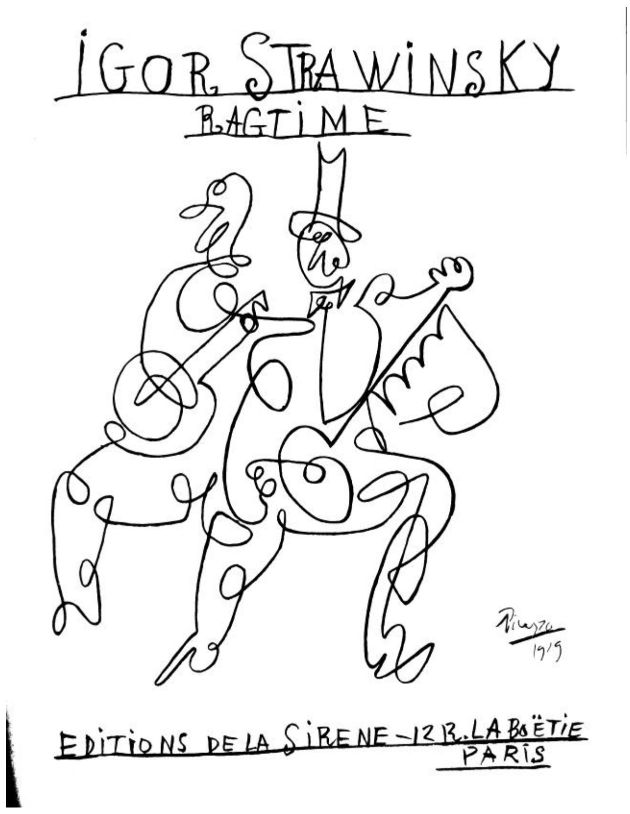
Zu zeigen: Sei G ein zusammenhängender Graph.
Dann gilt: G ist unikursal. $\Leftrightarrow$ zwei Knoten in G haben ungeraden Grad.

"$\Rightarrow$" Analog zu Satz 1

"$\Leftarrow$"

- Sei G ein zusammenhängender Graph mit genau zwei Knoten v_1 und v_n ungeraden Grades.
- **Trick**: Wir führen eine **Hilfskante e*** ein, die v_1 und v_n verbindet.
- Sei G* der erhaltene Graph. Da er nur Knoten graden Grades hat und zusammenhängend ist, haben wir einen eulerschen Kreis von G*. (Satz 1)
- In diesem Kreis muss irgendwo die Kante e* vorkommen. Sei $(e_1, e_2, \ldots, e_i, e^*, e_{i+2}, \ldots, e_m)$ der Eulerkreis. Dann ist (ei+2, …, em, e1, e2, …, ei) ein Eulerweg von G.
- G besitzt also einen Eulerweg.

Die folgende Abbildung zeigt ein Beispiel für einen *Eulerweg* von Pablo Picasso. Man erkennt den Anfangspunkt (mittig rechts) und den Endpunkt (im Hut). Wenn man nun genau hinschaut, fällt auf, dass es nur gerade Kreuzungen gibt. Das beweist, dass der Herr das Bild tatsächlich in einem Zug durch gemalt hat!



Schlussbemerkung

Da das Königsberger Brückenproblem der Ausgangspunkt eines neuen Teilgebietes der Mathematik ist, zählt es zu den absoluten Klassikern. Doch auch für Nicht-Mathematiker ist es interessant und kann mit einfachen Mitteln verständlich gemacht werden. Die Lösung verwendet überwiegend elementare Methoden, die im Wesentlichen schon mit Schulwissen verstanden werden können.

Gerade deshalb eignet sich das Thema auch gut für den Unterricht. So könnte man die Schülerinnen und Schüler zunächst versuchen lassen, durch Ausprobieren eine Lösung zu finden. Sie finden selbstständig Lösungsansätze und formulieren Regeln. Auch die Fähigkeit zum Problemlösen wird gefördert.

Quellenverzeichnis

Literatur

- **Müller-Philipp**, Susanne; **Gorski**, Hans-Joachim: Leitfaden Geometrie. Für Studierende der Lehrämtler. Wiesbaden: Vieweg. XV, 318 p., 2009 (S. 28-34)

- **Ringel**, Gerhard: Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen. Mathematische Monographien. 2. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. VIII, 132 S., 77 Abb., 1959 (S. 1-9)

- **Beutelsbacher**, Albrecht; **Zschiegner**, Marc-Alexander: Diskrete Mathematik für Einsteiger: Mit Anwendungen in Technik und Informatik. Berlin [u.a.]: Springer, Online-Ressource, 2008 (S. 137-144)

- **Hußmann**, Stephan; **Lutz-Westphal**, Brigitte: Kombinatorische Optimierung erleben: in Studium und Unterricht. Berlin [u.a.]: Springer, Online-Ressource, 2007 (S. 6-10; 69-94)

- **Matousek**, Nesetril: Diskrete Mathematik. Eine Entdeckungsreise. Berlin [u.a.]: Springer. XVII, 459 S., 2005 (S. 130-135)

Internet

- www.matheprisma.de

- www.maphi.de/mathematik/optimierung/opt_speziell_euler.html

- http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Lehre/aussermathAnw/Spaziergaenge.html

- http://projekte.gymnasium-odenthal.de/informatik/dateien/Informatik/Jahrgangsstufe%2012-13/Unterrichtsreihen%20mit%20%20Java/07%20Graphen/01%20Koenigsberger%20Brueckenproblem/Docs/Arbeitsblaetter%20zum%20Koenigsberger%20Brueckenproblem.pdf

Bilder

- www.mathematik.de/ger/information/kalenderblatt/differentialrechnung/differentialrechnung.html
- www.panoramio.com/photo/2881938
- http://de.wikipedia.org/wiki/Königsberger_Brückenproblem
- www.maphi.de/mathematik/optimierung/opt_speziell_euler.html
- www.ifp.uni-stuttgart.de/lehre/vorlesungen/GIS1/Lernmodule/Netzwerkanalyse/Graphentheorie/gfe_MO_NA1_de_9.html
- www.matheprisma.de/Module/Koenigsb/Biografi/Biogr2.htm
- http://garden.qc.cuny.edu:9200/music784/images/index.html
- http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Lehre/aussermathAnw/Spaziergaenge.html