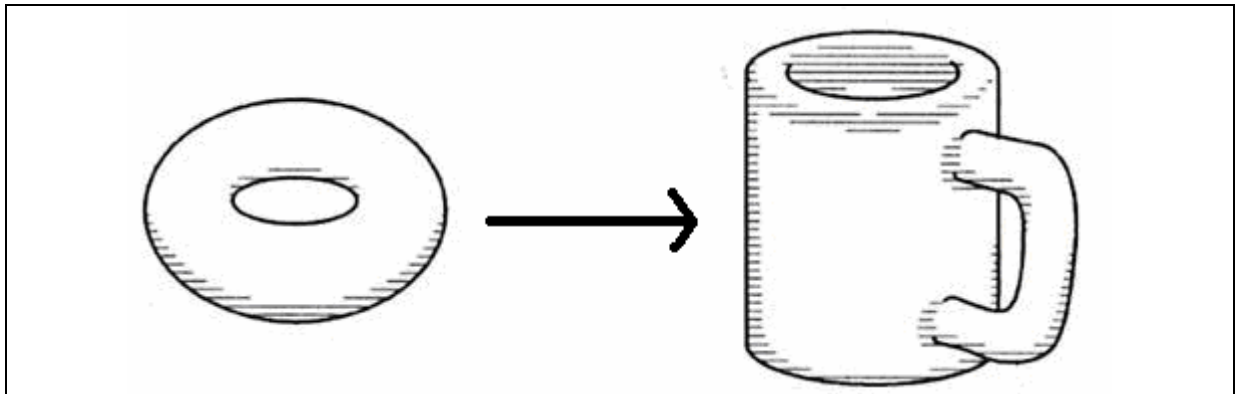
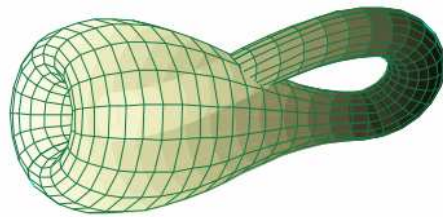


Topologie der Fläche

von Sebastian Renker

Leitung des Seminars „Klassische Probleme der Mathematik“:
Benjamin Schwarz



1. „Einfache“ Flächen und Oberflächen
2. Homöomorphismen als Abbildungen zwischen Flächen
3. Konstruktion von Flächen durch „Verklebung“ (Äquivalenzrelation)
4. Summe von Flächen durch Zusammensetzen
5. Quellen

1. „Einfache“ Flächen und Oberflächen

Als junger Mathematiker, der sich noch in Kinderschuhen befindet, muss man sich zunächst mit zwei grundlegenden Begriffen vertraut machen, um sich der Topologie der Fläche anzunähern. Diese zwei Begriffe sind Homöomorphismus und Fläche.

Zunächst einmal sind Flächen Teilmengen der Form $A \subset \mathbb{R}^n$. Da wir uns hier aber auf darstellbare Flächen beschränken wollen, genügen uns die Flächen $A \subset \mathbb{R}^2$ und die Oberflächen $A \subset \mathbb{R}^3$. Wichtige Flächen, die wir auch später betrachten werden, sind in dem Zusammenhang die reelle Ebene $\mathbb{R}^2$, die Einheitssphäre $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ und der Torus T^2 .

Besondere Erwähnung verdient das Möbius-Band, welches die einfachste nicht-orientierbare Fläche darstellt (weiter unten befindet sich eine Abbildung). Während ein Quadrat beispielsweise zwei unterschiedlichen Flächen besitzt, welche man auch unterschiedlich bemalen könnte, hat das Möbius-Band nur eine Fläche (nur eine „Seite“). Ein Möbius-Band lässt sich also mit einem Stift ohne abzusetzen und mit zwei Umrundungen komplett bemalen.

2. Homöomorphismen als Abbildungen zwischen Flächen

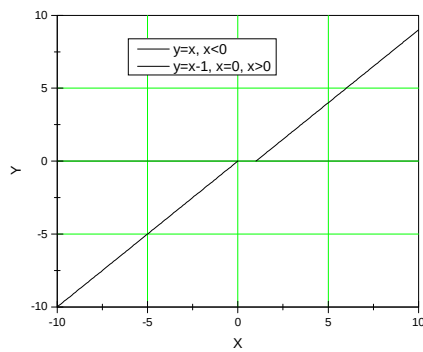
Jetzt ist es an der Zeit, sich mit dem Begriff Homöomorphismus auseinanderzusetzen. Ein Homöomorphismus ist eine Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen:

Definition von Homöomorphismus:

Ein Homöomorphismus ist eine bijektive Abbildung $f : F_1 \rightarrow F_2$ zwischen zwei Flächen F_1 und F_2 , bei der sowohl f als auch f^{-1} stetig sind ($F_1 \approx F_2$ - F_1 homöomorph zu F_2).

An dieser Stelle bietet es sich an, an folgendem Beispiel zu überprüfen, dass die Umkehrabbildung der folgenden bijektiven Abbildung f nicht zwangsläufig stetig sein muss:

$$f :]-\infty, 0[\cup [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x-1 & x \geq 1 \end{cases}$$

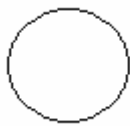


Nach der Einführung der zwei oben genannten Grundbegriffe soll im Folgenden gezeigt werden, wie sich bestimmte Flächen verändern, wenn man einen bestimmten Homöomorphismus auf diese anwendet. Oder anders gesagt kann ein Homöomorphismus eine gewisse verwandtschaftliche Beziehung zwischen zwei Flächen darstellen.

Zunächst einmal betrachten wir dazu zwei einfache Beispiele:

Beispiele für Homöomorphismen:

(i) In $\mathbb{R}^2$ ist jede Kreisscheibe ($r > 0$) homöomorph zu jedem Quadrat ($a > 0$).



homöomorph zu

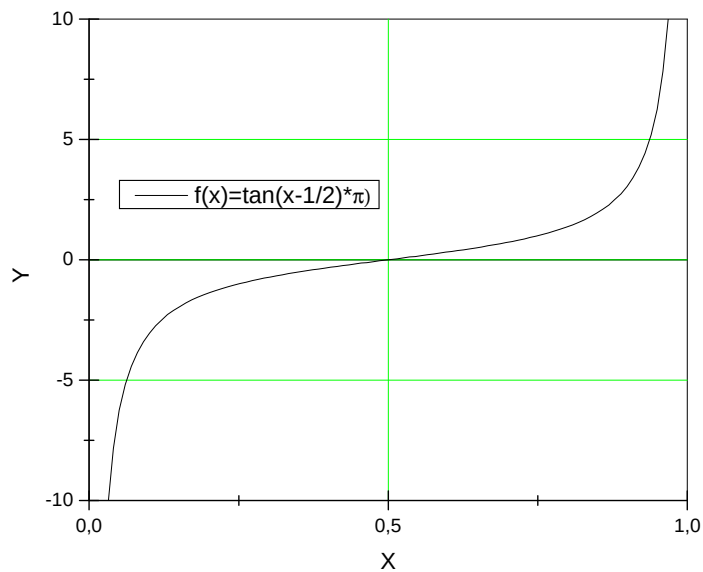


(ii) $f :]0,1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan\left(\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \pi\right)$ ist ein Homöomorphismus

$]0,1[$

homöomorph zu

$\mathbb{R}$



2. Homöomorphismen als Abbildungen zwischen Flächen

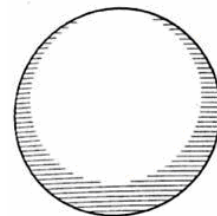
Man könnte sich jetzt die Frage stellen, ob jede Fläche zu jeder anderen Fläche homöomorph ist. Wir werden im Folgenden zwei Beispiele sehen und an Hand dieser beweisen, dass dies nicht der Fall ist.

Beispiele für keine Homöomorphismen:

(i) T^2 ist nicht homöomorph zu S^2

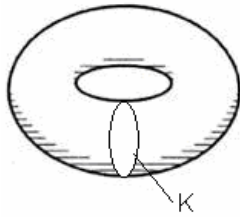


nicht homöomorph zu

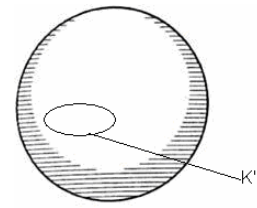


Beweis:

Angenommen, T^2 wäre homöomorph zu S^2 , dann gäbe es einen Homöomorphismus $f : T^2 \rightarrow S^2$:



homöomorph zu



Betrachtet man die Menge $T^2 \setminus K$, also die Oberfläche eines Torus, aus dem ein zusammenhängender Kreisring K herausgeschnitten wurde, so hat man immer noch eine zusammenhängende Menge.

Betrachtet man aber das Bild dieser Menge, $f(T^2 \setminus K)$, so muss man aus der Menge S^2 ebenfalls eine zusammenhängende Menge K' ausschneiden. Dann jedoch erhält man eine innere Menge und eine äußere Menge, die nicht mehr zusammenhängend sind.

Dies ist ein Widerspruch zum Satz der Gebietstreue, der besagt, dass das Bild $f(T^2 \setminus K)$ der zusammenhängenden Menge $T^2 \setminus K$ ebenfalls zusammenhängend ist.

□

(ii) S^2 ist nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^2$

Beweis:

Angenommen, S^2 wäre homöomorph zu $\mathbb{R}^2$, dann gäbe es einen Homöomorphismus $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

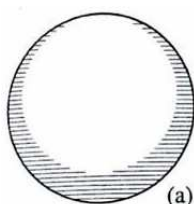
Da der Homöomorphismus f aber nach Definition stetig ist und S^2 kompakt ist, muss nach dem Kompaktheitssatz auch $f(S^2)$ kompakt sein, also insbesondere auch beschränkt. Das bedeutet aber, dass das Bild $f(S^2)$ niemals gleich $\mathbb{R}^2$ sein kann.

□

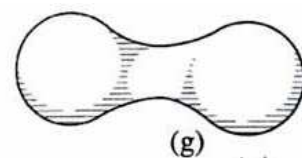
Nun wollen wir einige Beispiele für Homöomorphismen zwischen Flächen betrachten. Einige der folgenden Figuren finden sich im Sportunterricht, auf dem Oktoberfest oder im Bäckerladen. Beispielsweise besteht zwischen Donut und Bierkrug nicht nur ein kulinarischer Zusammenhang sondern auch ein mathematischer: Donut und Bierkrug sind homöomorph zueinander:

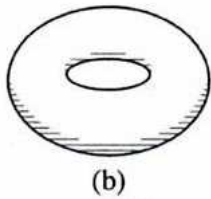
Homöomorphismen zwischen Figuren:

Anschaulich kann man sich einen Homöomorphismus als Dehnen, Stauchen, Verbiegen, Verzerren, Verdrillen einer Figur vorstellen; Zerschneiden ist nur erlaubt, wenn man die Teile später genau an der Schnittfläche wieder zusammenfügt.

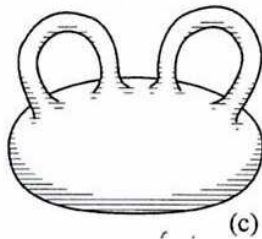


homöomorph zu

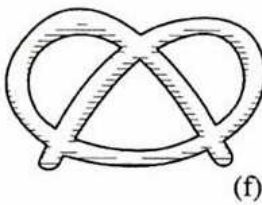
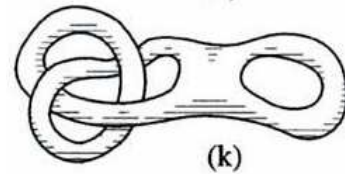




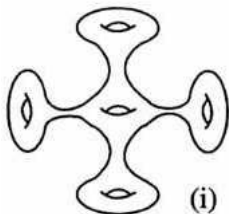
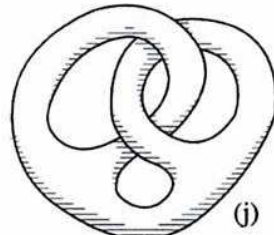
homöomorph zu



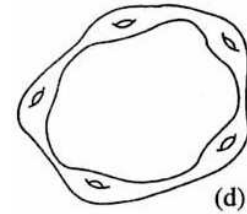
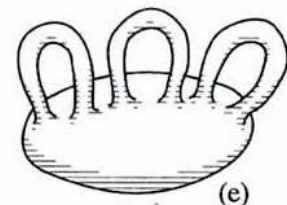
homöomorph zu



homöomorph zu



Nicht homöomorph zu



3.1 Konstruktion von Flächen durch „Verklebung“ (Äquivalenzrelation)

Wer sich an Geburtstagen gern der Aufgabe widmet, Servietten zu falten, wird in Zukunft in dem Zusammenhang sicher immer an Äquivalenzrelationen denken. Denn mit einem rechteckigen Blatt Papier kann man dadurch, dass man selbiges in einer bestimmten Art und Weise rollt, bestimmte Figuren darstellen, die zum ursprünglichen Rechteck homöomorph sind.

Diese „Rolltechniken“ lassen sich durch Äquivalenzrelationen beschreiben.

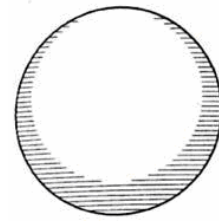
Anschaulich bedeutet es aber, dass man bestimmte Randpunkte zusammenklebt.

Beispiele für Äquivalenzrelationen auf topologischen Flächen:

(0) Werden alle Punkte des Randes eines Quadrats aufeinander geklebt, so erhält man eine Sphäre:



homöomorph zu

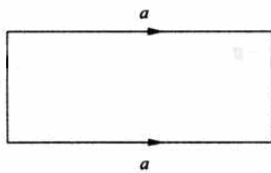


(i) Zylinder:

$$X = [0, 2] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2, (x_1, 0) \sim (x_1, 1)$$

$Y = X / \sim$ erzeugt die Oberfläche ∂Y eines Zylinders

$f : X \rightarrow \partial Y$ ist ein Homöomorphismus



homöomorph zu

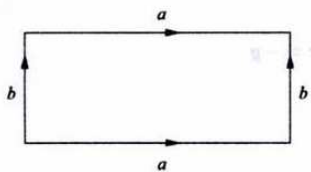


(ii) Torus:

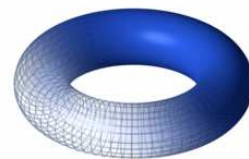
$$X = [0, 2] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2, (x_1, 0) \sim (x_1, 1) \text{ und } (0, x_2) \sim (2, x_2)$$

$Y = X / \sim$ erzeugt die Oberfläche ∂Y eines Torus

$f : X \rightarrow \partial Y$ ist ein Homöomorphismus



homöomorph zu

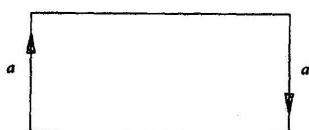


(iii) Möbius-Band:

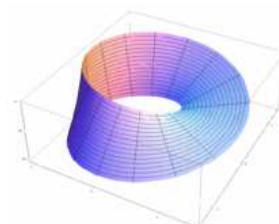
$$X = [0, 2] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2, (0, x_2) \sim (2, 1 - x_2)$$

$Y = X / \sim$ erzeugt die Oberfläche ∂Y eines Möbius-Bandes

$f : X \rightarrow \partial Y$ ist ein Homöomorphismus



homöomorph zu



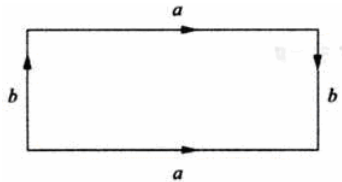
(iv) Kleinsche Flasche (Fläche):

$$X = [0, 2] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2, (x_1, 0) \sim (x_1, 1) \text{ und } (0, x_2) \sim (2, 1 - x_2)$$

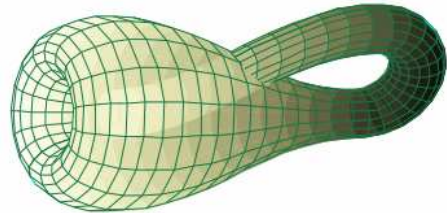
$Y = X / \sim$ erzeugt die Oberfläche ∂Y einer Kleinschen Flasche ∂Y

$f : X \rightarrow \partial Y$ ist ein Homöomorphismus

Die Kleinsche Flasche ist nicht-orientierbar



homöomorph zu

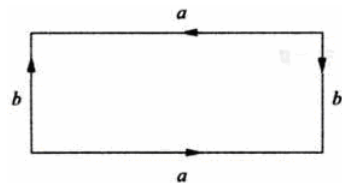


(v) Kreuzhaube:

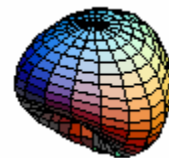
$$X = [0, 2] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2, (x_1, 0) \sim (1 - x_1, 1) \text{ und } (0, x_2) \sim (2, 1 - x_2)$$

$Y = X / \sim$ erzeugt die Oberfläche ∂Y einer Kreuzhaube

$f : X \rightarrow \partial Y$ ist ein Homöomorphismus



homöomorph zu



Das dritte Beispiel, das Möbius-Band, lässt sich in der Praxis mit einem einfachen Papierblatt umsetzen, wohingegen beim zweiten Beispiel, dem Torus, Schwierigkeiten beim zweiten Rollen auftreten. Daher ist hier eine Serviette oder ein Stück Stoff besser geeignet.

Nahezu unmöglich ist es, das vierte Beispiel, die Kleinsche Flasche, aus Papier herzustellen, da sie sich selbst durchschneidet. Jedoch gibt es Glasbläser, die in der Lage sind, eine Kleinsche Flasche aus Glas herzustellen.

Benannt wurde die Kleinsche Flasche nach dem deutschen Mathematiker Klein. Er fand diese Fläche und stellte ihre verblüffende Eigenschaft fest, sich selbst zu durchschneiden. In seinen Publikationen sprach er von der „Kleinsche Fläche“, wodurch vermutlich durch einen Lese- oder Druckfehler der Begriff „Kleinsche Flasche“ entstand.

Im Zusammenhang mit den Beispielen vier und fünf wollen wir uns kurz mit dem Begriff der Orientierbarkeit befassen:

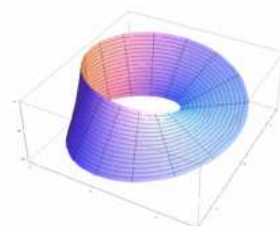
Definition von Orientierbarkeit:

Enthält eine Fläche eine Menge, die homöomorph zum Möbius-Band ist, so heißt die Fläche nicht-orientierbar, sonst orientierbar.



<--- orientierbar

Nicht-orientierbar --->

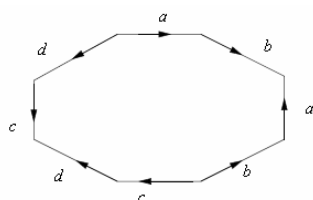


Die Kleinsche Flasche und die Kreuzhaube sind beide nicht-orientierbar. Bemerkenswert ist außerdem, dass man eine Kleinsche Flasche durch Verklebung zweier Möbius-Bänder konstruieren kann.

Überhaupt ist erstaunlich, dass sich die meisten Flächen durch Verklebung darstellen lassen, wie der folgende Satz zeigt:

Satz über kompakte, zusammenhängende Flächen:

Jede kompakte, zusammenhängende Fläche entsteht durch Verklebung eines Polygons.



homöomorph zu



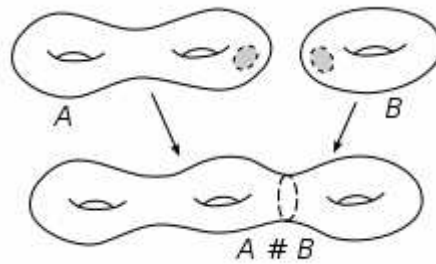
4. Summe von Flächen durch Zusammensetzen

Im zentralen und letzten Schritt soll die Frage beantwortet werden, ob es zu jeder (topologischen) Fläche einen Homöomorphismus gibt. Dazu ist es hilfreich, wenn man sich aus bekannten, einfachen Flächen neue, komplexe Flächen wie folgt konstruiert:

Definition von zusammenhängender Summe:

Die Fläche $F_1 \# F_2$ heißt zusammenhängende Summe von F_1 und F_2 .

$$(F_1 \# F_2 = \left((F_1 \setminus D_1) \cup (F_2 \setminus D_2) \right) / \sim)$$



Hierbei sind D_1 und D_2 zwei Kreisscheiben, die aus den Mengen M_1 und M_2 herausgetrennt werden (im Bild sind die zwei Mengen durch zwei Tori repräsentiert). Dies ist dazu notwendig, damit die resultierenden Flächen kompakt sind.

Jetzt ist es möglich, die folgende Aussage zu treffen, die für jede kompakt-zusammenhängende Fläche gilt:

Klassifikationssatz von kompakt-zusammenhängenden Flächen

Jede kompakt-zusammenhängende Fläche ist homöomorph zur Sphäre (S^2), zur zusammenhängenden Summe von Tori ($T^2 \# \dots \# T^2$) oder zur zusammenhängenden Summe von projektiven Ebenen ($P^2 \# \dots \# P^2$).

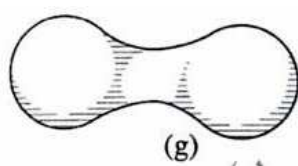
Auf die projektive Ebene wollen wir hier nicht näher eingehen; zu ihrem Verständnis ist es notwendig, sich mit der so genannten Inzidenzgeometrie auseinanderzusetzen.

Stattdessen machen wir mit dem Hintergrundwissen über die Summe von Flächen zum Schluss noch einen kurzen Rückblick. Es gilt nämlich:

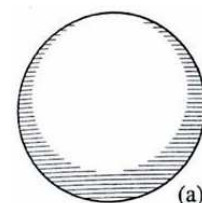
Bildet man die Summe aus der Sphäre S^2 und einer beliebigen weiteren Fläche F , so ist die resultierende Summe der Flächen $S^2 \# F$ homöomorph zu F :

$$S^2 \# F \approx F$$

Anschaulich ist dies die Verformbarkeit einer Figur; oben haben wir dies bereits in zwei Beispielen gesehen:

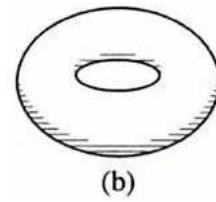


homöomorph zu





homöomorph zu



5. Quellen

- 1) "A first Course in Geometric Topology and Differential Geometry"
von Ethan Bloch
- 2) Skript zum Seminar „Topologie der Fläche“, geschrieben
von Katharina und Lutz Habermann
- 3) de.wikipedia.org