

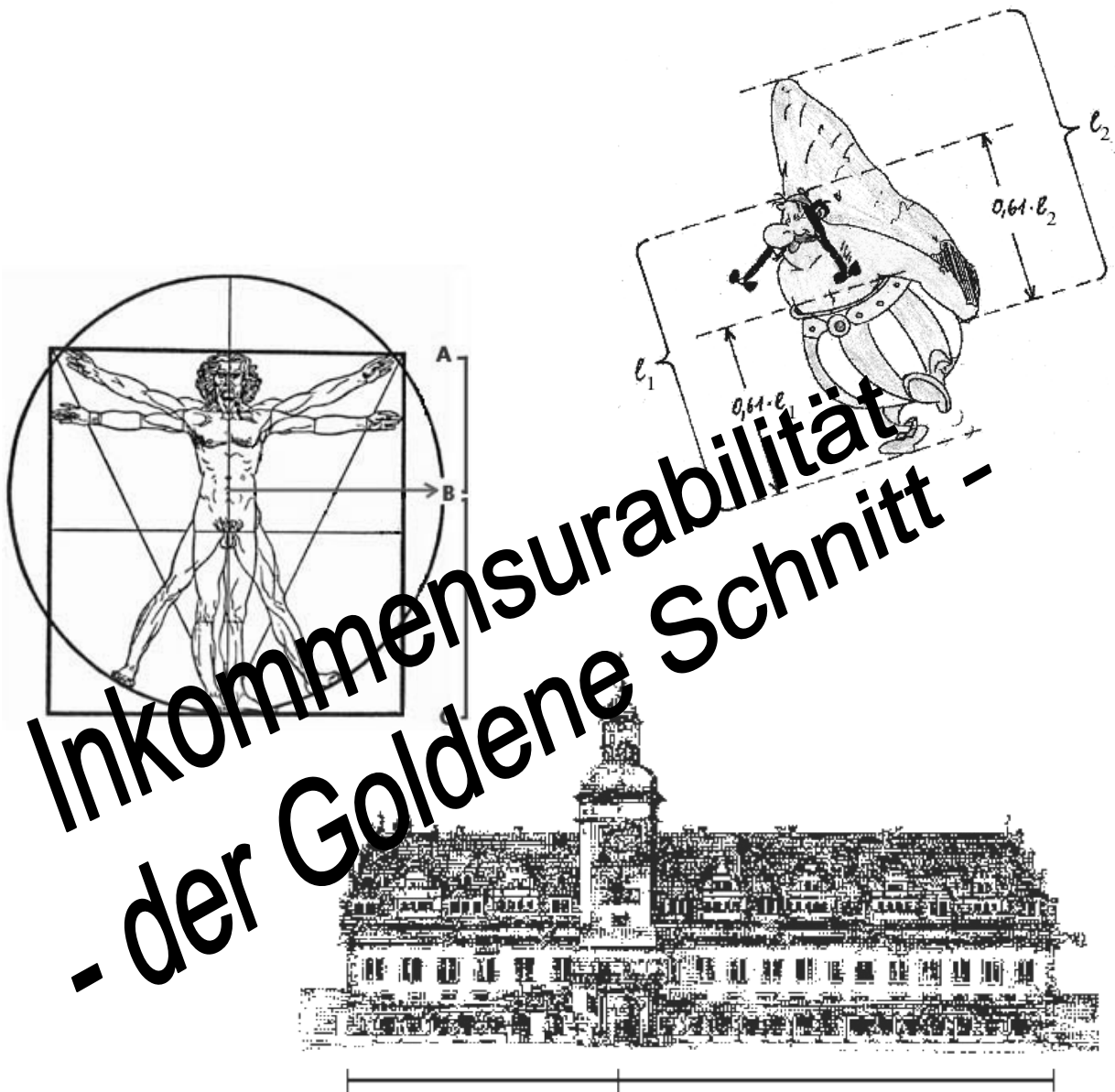
Philipps-Universität Marburg

Fachbereich 12

Seminar: „Klassische Probleme in der Mathematik“

Seminarleitung: Benjamin Schwarz

Referentin: Julia Krug



# Inkommensurabilität - der Goldene Schnitt -

## **Einleitung**

Im Folgenden soll es um das Phänomen der Inkommensurabilität gehen, die zur Zeit ihrer Entdeckung eine Bildungs- und Weltanschauungskrise auslöste. Dazu wird zunächst sehr knapp angerissen, wie der Zahlbegriff überhaupt entstanden ist und wie man seiner Zeit von den Natürlichenzahlen über die Einführung der negativen Zahlen und Brüchen zu der Annahme kam, dass es keine weiteren Zahlen zu geben scheint – irrationale Zahlen also nicht existierten. (Wer sich für eine ausführliche Darstellung dieser Entwicklung interessiert, sollte das Werk „Geschichte der Mathematik“ von H. Kaiser und W. Nöbauer zur Hand nehmen)

Als Beispiel für eine besondere irrationale Zahl wird näher auf den Goldenen Schnitt eingegangen, der vermutlich das erste inkommensurable Verhältnis zweier Strecken ist und im Pentagon entdeckt wurde.

Im Anhang der Ausarbeitung befinden sich die Materialien der Stationen Arbeit.

## **Entstehung des Zahlbegriffs**

Fragt man sich: „was sind und was sollen Zahlen?“, so stößt man auf das gleichnamige Werk Euklids und erhält Aussagen wie die Folgende:

„Die Zahlen sind freie Schöpfung des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen.“

(Richard Dedekind 1887)

Auch Aussagen wie die Leopold Kroneckers „Die natürlichen Zahlen hat Gott gemacht, alles übrige ist Menschenwerk“ sind wichtige Meilensteine in der Entwicklung des Zahlbegriffs. Die Entstehung der Schrift reicht jedoch viel weiter zurück: 3000v.Chr. wurden schon Schriftzeichen zur Darstellung von Zahlen benutzt. In Texten fanden sich sowohl ganze als auch Bruchzahlen, in Königsschriften in Ägypten sogar große Zahlen wie 1.420.000 (Ziegen). Der Zahlbegriff war also schon sehr hoch entwickelt.

In den verschiedenen Völkern existierten unterschiedliche Methoden zur Darstellung von Zahlen. So schrieben die Babylonier ihre Zahlreihen mittels Eindrücken eines Keils in verschiedenen Winkeln und die Griechen verwendeten Buchstaben, die zur Unterscheidung mit einem Querstrich versehen waren. Die Zahlzeichen der Römer sind sicherlich bekannt.

Die uns heute bekannte Schrift der Zahlen wurde von den Indern geschaffen und gelang auf dem Umweg über die Araber zu uns.

Bevor man Zeichen für Zahlen entwickelte, existierte jedoch oft schon eine sprachlich ausgedrückte Vorstellung, die sich durch die Existenz des Duals, in einigen Sprachen bis

hin zum Trial, Quaternal etc., zeigte. So zum Beispiel im Altarabischen: „radjulun“ bedeutet Mann und für die Bezeichnung von zwei Männern existierte das Wort „radjulani“.

Von Volk zu Volk unterschiedlich zeigten die Zahlenreihen Einschnitte an gewissen Stellen auf, die zu einer Bündelung führen. So zählte man in einem sumerischen Dialekt mithilfe eines „Dreiersystems“ (3 vorüber → 4; 3 vorüber und 1 → 5; 3 vorüber und 1 und 1 → 6; 3,3 und 1 → 7). Eine Art 20-Zählung existiert noch heute im Irischen: die Reihe läuft von 20 bis 180 in 20er-Schritten durch. Meist wird allerdings ein Dezimalsystem benutzt und große Zahlen werden nach dem Schema „das Vielfache und Zuzählen“ gebildet. So bedeutet im Deutschen die Endung „-zig“ so viel wie Zehner-Gezehnt: vierundzwanzig bedeutet also  $4+2 \cdot 10$ .

Es gibt aber auch Sprachen, die nach dem Schema der Rückzählung zählen. So zum Beispiel das Lateinische: 18 wird durch duodeviginti (2 von 20) dargestellt. In den alten Sprachen Skandinaviens nutzte man eine Oberzählung: 26 ist hier dann „6 von dritten Zehner“.

Eine wissenschaftliche Untersuchung von Zahlssystemen findet man erst bei den Griechen. Man diskutierte zum Beispiel über die Frage, ob die 1 und die 0 zu den Zahlen zählen, oder nicht. Als Beispiel für die Argumentationsweise eine Aussage Aristoteles, der die 1 ausdrücklich nicht als Zahl ansah:

„Wie eine Maßeinheit der Anfang und die Grundlage des Messens, aber selbst kein Maß ist, so ist die Eins die Grundlage des Zählens, der Ursprung der Zahl, aber selbst keine Zahl“.<sup>1</sup>

Der Begriff der natürlichen Zahlen bildet sich langsam aus der Abstraktion des Zählvorgangs heraus.

Als nächster Schritt wurden die negativen Zahlen eingeführt. Diese traten schon sehr früh in chinesischen Rechenbüchern auf, bei den Indern bedeuteten Positiv und Negativ ursprünglich Vermögen bzw. Schulden. Allerdings wurden negative Zahlen zunächst eher als Hilfsmittel für algebraische Zwischenrechnungen und nicht als Lösung von Gleichungen anerkannt. Das geschah erstmals durch Leonardo von Pisa, der die folgende Aufgabe stellte:

Vier Personen besitzen Geldbeträge  $x_1, x_2, x_3$  und  $x_4$  und finden Geldbörse mit unbekanntem Inhalt  $b$ . Es soll gelten:

$$x_1 + b = 2(x_2 + x_3)$$

$$x_2 + b = 2(x_3 + x_4)$$

$$x_3 + b = 2(x_4 + x_1)$$

$$x_4 + b = 2(x_1 + x_2)$$

---

<sup>1</sup> KAISER, Hans. „Geschichte der Mathematik“. 2. erweiterte Auflage, 1998, Seite 108

Von Pisa behauptete schließlich:

„Ich werde zeigen, dass dieses Problem unlösbar ist, wenn nicht zugelassen wird, dass der erste Partner Schulen hat“<sup>2</sup>

(Leonardo von Pisa)

Brüche entstanden dann zunächst in Form von „Stammbrüchen“ (Brüche mit Zähler So stellten die Ägypter den Bruch  $\frac{5}{7}$  wie folgt dar:  $5 \frac{1}{2} \frac{1}{7} \frac{1}{14}$ . Zu dem existierten einige allgemeine Brüche, deren Zähler ungleich 1 war: z.B.  $\frac{2}{3}$ . Vermutlich war es Idee der Babylonier, dass es auch Brüche mit Zähler größer 1 geben kann, denn es wurden Brüche solcher Art in Keilschrifttexten gefunden. Die Griechen fassten Brüche als „Verhältnis“ von Strecken auf und nannten diese auch so.

Man nannte zwei Strecken kommensurabel, wenn eine gemeinsame Einheit existiert, sodass die beiden Strecken jeweils ein Vielfaches der Einheit sind. Anders ausgedrückt:

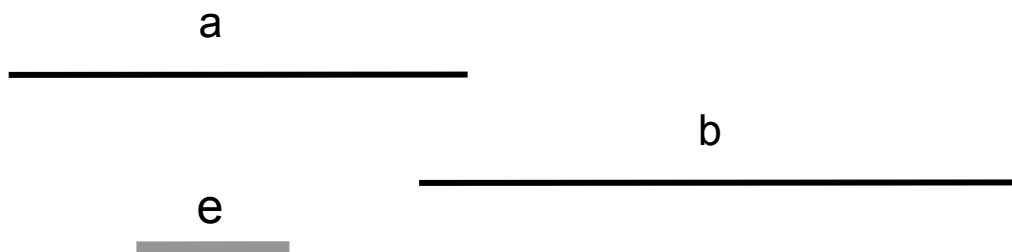
Zwei Strecken  $a_0$  und  $a_1$  hießen **kommensurabel**  $\Leftrightarrow$

$$a_0 = m \cdot e \text{ und } a_1 = n \cdot e \quad \text{mit } n, m \in \mathbb{N}$$

Das Streckenverhältnis  $a_0$  zu  $a_1$  ist also ein Verhältnis  $m/n$  natürlicher Zahlen.

#### Veranschaulichung:

für zwei Strecken  $a$  und  $b$  existiert ein gemeinsames Maß  $e$



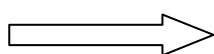
So dass gilt:



$$\rightarrow a = 3 \cdot e$$



$$\rightarrow b = 4 \cdot e$$



$$a:b = 3:4 \quad (\text{Verhältnis natürlicher Zahlen})$$

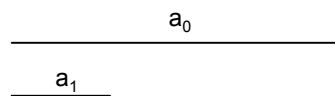
<sup>2</sup> KAISER, Hans. „Geschichte der Mathematik“. 2. erweiterte Auflage, 1998, Seite 108

Man glaubte, es gäbe immer ein gemeinsames Maß zweier Strecken und somit wären alle Zahlen als Bruch natürlicher Zahlen darstellbar.

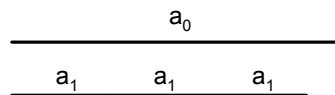
Veranschaulicht wurde dieses Verhalten von Strecken durch das Verfahren der „Wechselwegnahme“, eben der Bestimmung eines gemeinsamen Maßes zweier Strecken.

## „Wechselwegnahme“

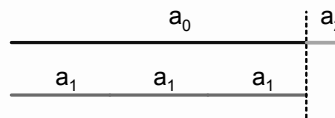
Suchen gemeinsames Maß von  $a_0$  und  $a_1$



Kleinere Strecke  $a_1$  so oft wie möglich auf größere  $a_0$  abtragen

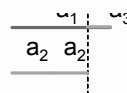


Bezeichnen Rest von  $a_0$  mit  $a_2$



$$a_0 = n_1 \cdot a_1 + a_2 \quad \text{mit } a_2 < a_1$$

Gleiches Verfahren für  $a_1$  und  $a_2$



$$a_1 = n_2 \cdot a_2 + a_3 \quad \text{mit } a_3 < a_2$$

Entsprechend fortfahren:

$$a_2 = n_3 \cdot a_3 + a_4 \quad \text{mit } a_4 < a_3$$

⋮

Besitzen  $a_0$  und  $a_1$  gemeinsames Maß, bricht dieses Verfahren nach endlich vielen Schritten ab

$$\Rightarrow \text{es existiert ein } k \text{ mit } a_{k-1} = n_k \cdot a_k$$

$$\Rightarrow a_k \text{ ist gemeinsames Maß von } a_0 \text{ und } a_1$$

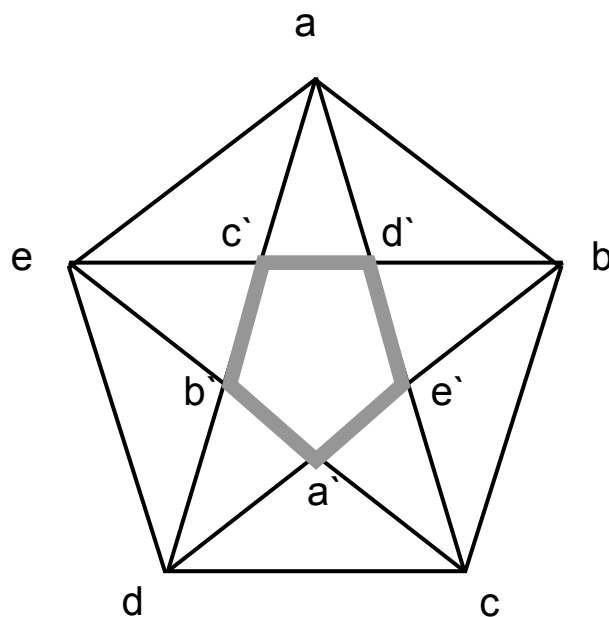
Man war davon überzeugt, dass das Verfahren der Wechselwegnahme immer abbricht und daher ein gemeinsames Maß immer vorhanden ist.

Heute würde man sagen, dass es lediglich zeigt, dass man jedes Streckenverhältnis in einem Kettenbruch entwickeln kann, der endlich ist, wenn  $a_0$  und  $a_1$  kommensurabel sind, also ein gemeinsames Maß besitzen:

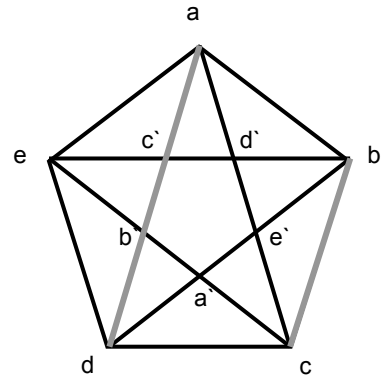
$$\begin{aligned}
 a_0 : a_1 &= n_1 + a_2 : a_1 \\
 &= n_1 + \frac{1}{a_1 : a_2} = n_1 + \frac{1}{n_2 + a_3 : a_2} \\
 &= n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{a_2 : a_3}} = \dots = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \dots}}
 \end{aligned}$$

Vermutlich war es Hippasus von Metapont, der im 5. vorchristlichen Jahrhundert ausgerechnet anhand des Ordensymbols der Phytagoräer, dem Pentagramm, festgestellt hat, dass zwei Strecken eben nicht kommensurabel sein müssen, wie der folgende Beweis zeigt:

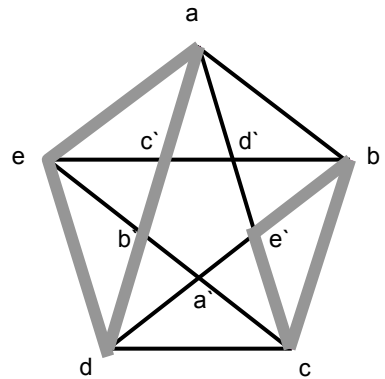
Zeichnet man in ein reguläres Pentagramm a,b,c,d,e seine Diagonalen ein, so erhält man in der Mitte ein kleines regelmäßiges Fünfeck a',b',c',d',e' :



Je eine Seite und eine Diagonale  
im regelmäßigen Pentagon sind parallel

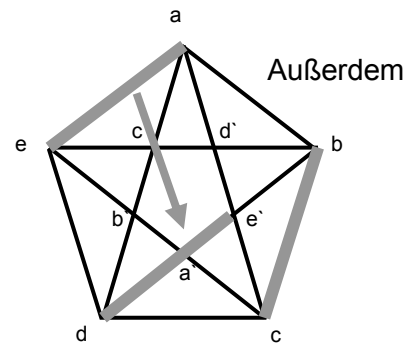


⇒ aed und be`c sind ähnlich



Somit gilt auch:  $ad : ae = bc : be'$

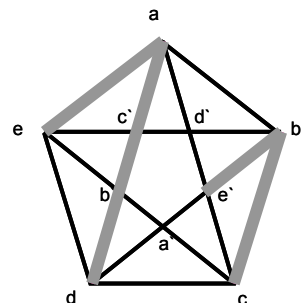
gilt:  $bc = ae = de'$



und  $bd - de' = be'$

woraus folgt:  $bd - bc = be'$

Insgesamt ergibt sich aus diesen  
Eigenschaften des regelmäßigen  
Pentagramms die folgende allgemeine  
Verhältnisbeziehung:



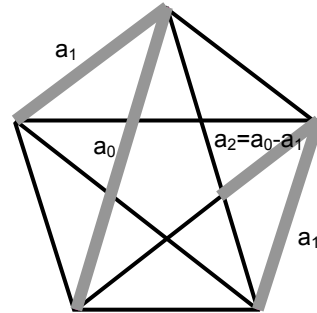
**Diagonale : Seite = Seite : (Diagonle – Seite)**

Sei  $a_0$  eine Diagonale und  $a_1$  eine Seite.

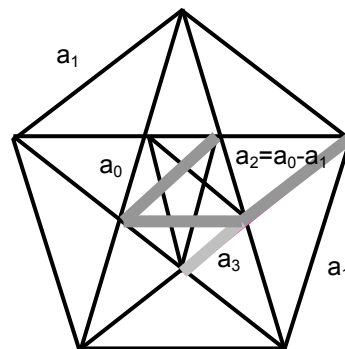
Die Differenz  $a_0 - a_1 = a_2$

Dann gilt also:

$$a_0 : a_1 = a_1 : a_2$$



Bildet man nun die Differenz  $a_1 - a_2 = a_3$ ,  
so kann man erkennen, dass  $a_3$  eben genau  
eine Seite im inneren kleinen Pentagon ist  
und  $a_2$  der Diagonale dieses Pentagons  
entspricht (die dunkler grau gefärbten  
Strecken sind nämlich alle gleich lang mit  
Begründung, die schon weiter oben  
ähnlich dargestellt wurde).



Daraus ergibt sich:

$$a_2 : a_3 = a_1 : a_2 = a_0 : a_1$$

Diese Verfahren ist nun unendlich oft fortsetzbar, weil durch einzeichnen der Diagonalen im regelmäßigen Pentagon eben immer wieder ein inneres, kleines ebenfalls regelmäßiges Pentagon entsteht und die Differenz aus Seite und (Diagonale-Seite) des größeren Pentagons genau die Länge der Seite des inneren, kleineren Pentagons hat und die Differenz Diagonale-Seite genau der Diagonale des inneren Pentagons entspricht. Also gilt

$$a_0 : a_1 = a_1 : a_2 = a_2 : a_3 = a_3 : a_4 = a_4 : a_5 = \dots$$

Auf diese Weise hat Hippasus gezeigt, dass es für Seite und Diagonale in einem regelmäßigen Fünfeck eben kein gemeinsames Maß gibt und die beiden Strecken somit nicht kommensurabel sondern inkommensurabel sind. Das Verhältnis Diagonale zu Seite kann also nicht durch einen ganzzahligen Bruch dargestellt werden was in der heutigen Mathematik genau der Eigenschaft einer irrationalen Zahl entspricht.

Als weiteres Beispiel für die Existenz von inkommensurablen Strecken ist der Beweis der **Irrationalität von  $\sqrt{2}$  von Euklid:**

Sei **a** Seite und **d** Diagonale eines Quadrats

**Annahme:** a und d sind kommensurabel

$\Rightarrow d:a = m:n$  mit  $m, n \in \mathbb{N}$  (m und n kleinstmöglich gewählt)



Es wäre auch  $d^2:a^2 = m^2:n^2$

es gilt auch  $d^2 = 2a^2$  (Pythagoras)

$\Rightarrow m^2 = 2n^2$ , also  $m$  gerade ( $m=2l$ )

$m$  und  $n$  kleinstmöglich gewählt  $\Rightarrow m$  und  $n$  teilerfremd

$\Rightarrow n$  muss ungerade sein

$m=2l$  also gilt auch:  $m^2=4l^2$

weil  $m^2=2n^2$ , würde gelten:  $n^2=2l^2$

$n$  wäre ungerade und gerade



Der eigentliche Schritt zur Irrationalität war aber noch nicht wirklich getan. Die Griechen fassten irrationale Zahlen wie  $\sqrt{2}$  geometrisch auf. Also als Diagonale des Einheitsquadrats und  $\pi$  eben als Verhältnis von Radius zu Umfang oder Fläche.

„Rationale und irrationale Größen gehören nicht zu dem an sich Gedachten, sondern zu dem mit andrem Vergleichenen... jede Größe ist an und für sich weder rational noch irrational,... sondern erst durch Vergleichung mit einer durch Setzung angenommenen Einheit.“<sup>3</sup>

Die Entdeckung, dass nicht alles durch rationale Zahlen zu erfassen ist, löste eine Bildungs- und Weltanschauungskrise aus, die so genannte „Grundlagenkrise“, und brachte ihrem Entdecker Gerüchten nach die Strafe Gottes ein.

### Der goldene Schnitt

Der Goldene Schnitt ist ein besonderes Verhältnis zweier Strecken. Für zwei Strecken im Goldenen Schnitt gilt das folgende Verhältnis:

*Die Größere verhält sich zur Kleineren wie die Summe aus beiden zur Größeren*



Es gilt also  $a:b = (a+b):a$

Man bezeichnet den Goldenen Schnitt mit  $\phi$

Der Goldene Schnitt entspricht genau dem Verhältnis von Diagonale zu Seite in einem regelmäßigen Pentagon, denn hier gilt ja:

<sup>3</sup> KAISER, Hans. „Geschichte der Mathematik“. 2. erweiterte Auflage, 1998, Seite 117

<sup>4</sup> [http://de.wikipedia.org/wiki/Goldener\\_Schnitt](http://de.wikipedia.org/wiki/Goldener_Schnitt)

Diagonale:Seite = Seite:(Diagonale-Seite)

Nenne man die Seiten wie oben, so gilt auch:

$$a_1 \cdot a_2 = (a_1 + a_2) \cdot a_1$$

Die Irrationalität der Zahl  $\varphi$  ist durch den Beweise der Inkommensurabilität der Diagonale und Seite im regelmäßigen Pentagon gezeigt.

Herleitung des Zahlwerts von  $\varphi$

$$\varphi = a/b = (a+b)/a = 1+b/a = 1 + 1/\varphi$$

$$\Leftrightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi_1 = (1 + \sqrt{5})/2 \text{ und } \varphi_2 = (1 - \sqrt{5})/2$$

$\varphi_2$  entspricht einem negativen Wert, kann also nicht der Zahlwert des Goldenen Schnitts sein. Daraus ergibt sich  $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1,618033\dots$ , wobei es sich hierbei um das Verhältnis der großen Strecke zur kleinen handelt. Die Umkehrung, also kurze Strecke zu lange Strecke, wird oft mit kleinem phi bezeichnet und entspricht  $(\sqrt{5} - 1)/2 = 0.618\dots$ . Der Goldene Schnitt ist ein besonderes Verhältnis, das neben der Mathematik auch in Natur, Architektur und vielen weiteren Gebieten auftaucht. Dazu sind im Anhang die Materialien der Stationsarbeit zum Goldenen Schnitt zu finden.

### Literatur

KAISER, Hans. „Geschichte der Mathematik“. 2. erweiterte Auflage, 1998

EBBINGHAUS, H.-D.; HERMES, H.; HIRZEBRUCH, F.; KOECHER, M.; MAINZER, K.;

PRESTEL, A.; REMMERT, R. „Zahlen“. Springer-Verlag, Berlin, 1983

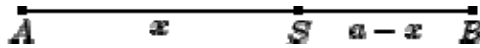
[http://de.wikipedia.org/wiki/Goldener\\_Schnitt](http://de.wikipedia.org/wiki/Goldener_Schnitt)

(letzter Zugriff: 15.01.10)

<http://www.mathematik.de/ger/information/landkarte/zahlen/dergoldeneschnitt.html>

(letzter Zugriff: 15.01.10)

## Bestimmung des Verhältnisses „kleine Seite zur großen“



Es gilt: Das Verhältnis „kleine Seite“ SB zur „großen Seite“ AS ist gleich dem Verhältnis „große Seite“ AS zur ganzen Seite AB.

Die Formel heißt dann also

$$\frac{a-x}{x} = \frac{x}{a}$$

Das kann man wie folgt lösen:

Wir nehmen beide Seiten der Gleichung mit  $ax$  mal und erhalten

$$(a-x)a = x^2,$$

was das Gleiche ist wie

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

Eine quadratische Gleichung in  $x$ . Die  $p$ - $q$ -Formel liefert die Lösungen

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = a \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right)$$
$$x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = a \left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right)$$

Hier kommt jedoch  $x_2$  nicht in Frage, weil es negativ ist. Unsere Lösung ist also

$$x = a \cdot \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right)$$

Insbesondere ist das "goldene Schnittverhältnis"

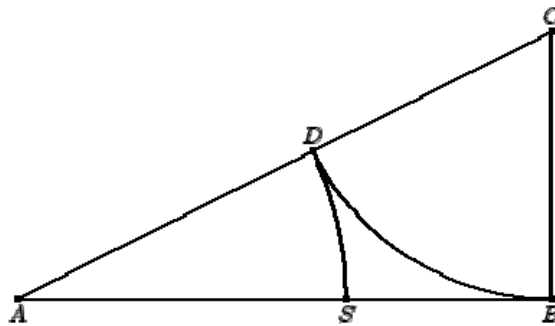
$$\frac{a-x}{x} = \frac{x}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Entspricht dem Zahlwert 0,618...

## Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Es sei  $AB$  eine Strecke der Länge  $a$ . Mithilfe von Zirkel und Lineal wollen wir diese Strecke im Verhältnis des Goldenen Schnitts teilen. Dazu geht man wie folgt vor:

1. Zuerst errichtet man das Lot mit Fußpunkt  $B$  auf die Strecke  $A,B$ .
2. Auf diesem Lot tragen wir nun ausgehend von  $B$  die Länge  $a/2$  ab und erhalten so den Hilfspunkt  $C$ .
3. Verbinde nun die Punkte  $A$  und  $C$ .
4. Schlage einen Kreis mit Radius  $CB = a/2$  um  $C$ . Den Schnittpunkt dieses Kreises mit der Strecke  $A,C$  nennen wir  $D$ .
5. Nun zeichnen wir den Kreis mit Radius  $AD$  um  $A$ . Der Schnittpunkt dieses Kreises mit der Ausgangsstrecke  $A,B$  ist  $S$ .



### Warum teilt $S$ die Strecke $AB$ im Goldenen Schnitt?

Mit dem Satz von Pythagoras können wir  $AS$  einfach berechnen: Da das Dreieck  $ABC$  rechtwinklig ist, gilt

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2.$$

Wurzelziehen und Einsetzen von  $AB = a$  und  $BC = a/2$  liefert

$$AC = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{5} \cdot \frac{a}{2}$$

Da nun  $CD = CB = a/2$  ist, folgt

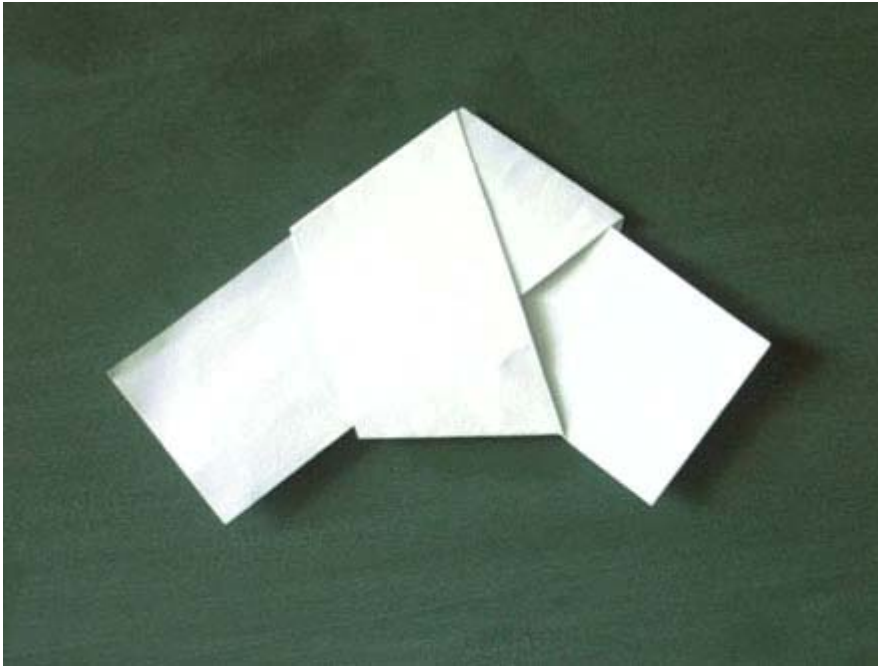
$$AD = AC - CD = \sqrt{5} \cdot \frac{a}{2} - \frac{a}{2},$$

also  $AD = a \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2}$ . Nach Konstruktion ist aber  $AS = AD$  und damit

$$\frac{AS}{AB} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

### Den Goldenen Schnitt falten

Macht man in einen Papierstreifen einen einfachen Knoten und drückt diesen dann platt, entsteht ein reguläres Fünfeck.



**Der goldene Winkel**

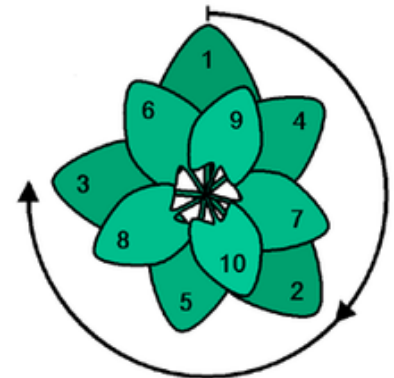
Beim goldenen Winkel handelt es sich um den Winkel  $\Psi \approx 137,5^\circ$   
 Man erhält diesen Winkel, in dem man den Kreis mittels Winkel im Verhältnis des Goldenen Schnittes teilt und den kleineren der beiden Winkel betrachtet. (da sich Winkel kleiner als  $180^\circ$  für die Praxis als handlicher erweisen



### Auftreten des Goldenen Winkels in der Natur

Das spektakulärste Beispiel für die Realisierung des Goldenen Schnitts in der Natur findet sich bei der Anordnung von **Blättern** und in **Blütenständen** mancher **Pflanzen**. Bei diesen Pflanzen teilt der Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Blättern den Vollkreis von  $360^\circ$  im Verhältnis des Goldenen Schnittes  $\rightarrow$  Es handelt sich um den Goldenen Winkel von etwa  $137,5^\circ$ .

Beispiele sind die **Sonnenblume**, **Kohlarten**, **Kiefernnadeln** an jungen Ästen, **Zapfen**, **Agaven**, viele **Palmen-** und **Yuccaarten** und die Blütenblätter der **Rose**, um nur einige zu nennen.



### Der Goldene Schnitt in der Natur

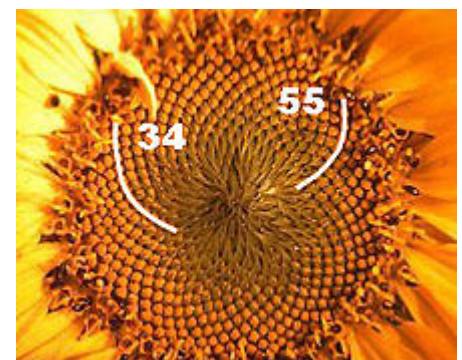
Wir haben schon gesehen, dass das Verhältnis zweier aufeinander folgender Fibonaccifolgglieder eine Approximation an den goldenen Schnitt ist. Nun stellt man fest, dass die Kerne einer Sonnenblume ein ganz besonderes Muster aufweisen: Sie liegen auf spiralförmigen Linien, die sich von der Mitte bis zum Rand der Sonnenblume winden.

Jeder Kern liegt auf genau einem links- und einem rechtsdrehenden Spiralarm. Seltsamerweise sind nun sowohl die Anzahl der linksdrehenden Spirallinien als auch die



der rechtsdrehenden Fibonaccizahlen! Und zwar benachbarte. In der Natur findet man für die Anzahl der linksdrehenden Spirallinien Werte von 21, 34, 55, 89 und 233. Das Verhältnis von linksdrehenden zu rechtsdrehenden Spirallinien ist in guter Näherung der goldene Schnitt.

Ähnliche Phänomene findet man bei der Schuppenanordnung von Tannenzapfen und Ananas.



### Der Goldene Schnitt am menschlichen Körper

Auch am menschlichen Körper findet man den goldenen Schnitt. Zum Beispiel:

- das Verhältnis vom Abstand Bauchnabel -- Sohle zum Abstand Scheitel -- Bauchnabel

- steht man aufrecht und lässt die Arme an der Seite herabhängen, das Verhältnis vom Abstand Scheitel -- Fingerspitzen zum Abstand Fingerspitzen -- Sohle.

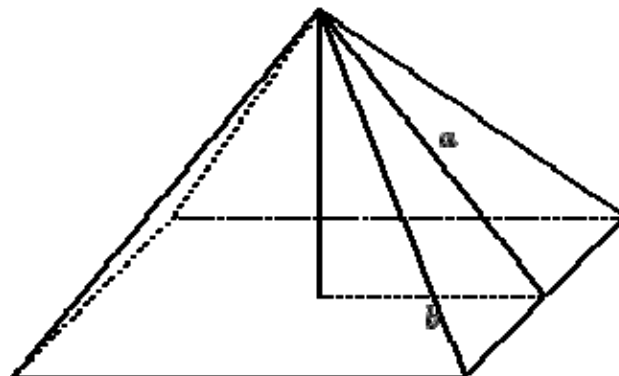
### Der goldene Schnitt in der Architektur

Zwei Beispiele für den goldenen Schnitt in der Architektur: Die Cheopspyramide und das alte Leipziger Rathaus. Zunächst zur Cheopspyramide:



Nennen wir den Abstand der Spitze der Pyramide zum Mittelpunkt einer der Grundseiten  $a$  und den Abstand des Mittelpunkts der Grundfläche zu diesem Punkt  $b$ .

Dann hat man festgestellt, dass  $a/b$  in guter Näherung Phi ergibt.



Deutlicher erkennt man den goldenen Schnitt am alten Leipziger Rathaus.

Der Turm teilt das Gebäude gerade im goldenen Verhältnis. Auf dem Bild kann man das der Perspektive wegen natürlich nicht sofort sehen. Zählt man aber die Torbögen links und rechts vom Turm, so kommt man auf acht bzw. dreizehn: Zwei benachbarte Fibonaccizahlen!