Applications to the Numerical Treatment of Operator Equations

Von der Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät der

Rheinisch–Westfälischen Technischen Hochschule Aachen genehmigte

Habilitationsschrift zur Erlangung der venia legendi

vorgelegt von

Dr. rer. nat. Stephan Dahlke

aus

Bremen

Referenten: Prof. Dr. Wolfgang Dahmen, RWTH Aachen

Prof. Dr. Ronald A. DeVore, University of South Carolina

Prof. Dr. Henning Esser, RWTH Aachen

Tag der Habilitation: 2. Dezember 1996

Probevortrag und Kolloquium: 10. Juli 1996

Thema des Probevortrags: Das restringierte Dreikörperproblem: Quasiperiodische Lösungen, kleine Nenner und KAM–Theorie

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit einem neuen und rasch expandierenden mathematischen Gebiet, und zwar mit Wavelet Analysis. Die vorliegende Untersuchung besteht aus zwei Hauptteilen. Im ersten Teil befassen wir uns mit der Konstruktion von Wavelets. In Vordergrund steht die Entwicklung multivariater Wavelet–Basen für allgemeine Skalierungsmatrizen. Wir leiten einen allgemeinen, auf der Theorie selbstähnlicher Tilings basierenden Ansatz her, welcher auf viele nichttriviale Skalierungsmatrizen angewendet werden kann, und untersuchen die Eigenschaften der resultierenden Wavelet–Basis. Wir geben insbesondere hinreichende Bedingungen für Glattheit und für Stabilität der Translate der Wavelet–Basis an. Weiterhin konstruieren wir an Pseudodifferentialoperatoren angepaßte Wavelets. Der zweite Hauptteil der Arbeit beschäftigt sich mit den Anwendungen von Wavelets bei der numerischen Behandlung von Operatorgleichungen. Insbesondere wird untersucht, wie Wavelet Analysis zur Konstruktion und zur Analyse von adaptiven numerischen Verfahren benutzt werden kann. Die Effizienz von adaptiven Algorithmen hängt im allgemeinen von der Regularität der exakten Lösung in einer speziellen Skala von Besov–Räumen ab. Für eine große Klasse von Problemen, insbesondere für elliptische partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, kann diese Besov–Regularität mittels Wavelet Analysis untersucht werden. Die Beweise der Regularitätssätze basieren auf der Tatsache, daß viele Funktionenräume, insbesondere auch Besov–Räume, mittels gewichteter Folgennormen der Koeffizienten von Wavelet–Entwicklungen charakterisiert werden können. Wir geben außerdem eine geeignete adaptive Strategie an. Wiederum aufbauend auf Wavelet–Entwicklungen konstruieren wir zuverlässige und effiziente a–posteriori Fehlerschätzer, welche zu einer adaptiven Verfeinerungsstrategie führen, deren Konvergenz für eine große Klasse von Problemen, inklusive für Operatoren negativer Ordnung, gezeigt werden kann.