

Das Toda-Lattice als vollständig integrables Hamiltonsches System

Thomas W. Geiger
 Betreuung: Prof. Harald Upmeyer
 Vortrag im April 2009, Marburg

Inhaltsverzeichnis

1	Vollständig integrable Hamiltonsche Systeme	2
2	Die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$	3
3	Der Dualraum einer endlichdimensionalen Lie-Algebra als Poisson-Mannigfaltigkeit	6
4	Adjungierte und coadjungierte Darstellung in $\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$ und $\mathfrak{ln}\mathbb{R}$	7
5	Konstruktion Poisson-kommutierender Funktionen auf $\mathfrak{ln}\mathbb{R}^\#$	12
5.1	Das Lemma von Kostant-Symes	12
5.2	Die Poisson-kommutierenden Funktionen \tilde{H}_k auf $\mathfrak{ln}\mathbb{R}^\#$	14
6	Der coadjungierte Orbit $\mathcal{O}_\tilde{p}^{\mathfrak{ln}\mathbb{R}^\#}$ als symplektische Mannigfaltigkeit	15
6.1	Zerblätterung einer Poisson-Mannigfaltigkeit in symplektische Untermannigfaltigkeiten	15
6.2	Der coadjungierte Orbit $\mathcal{O}_\tilde{p}^{\mathfrak{ln}\mathbb{R}^\#}$	16
6.3	Die Tangentialräume $T_\ell\mathcal{O}_\tilde{p}^{\mathfrak{ln}\mathbb{R}^\#}$	20
6.4	$\mathcal{O}_\tilde{p}^{\mathfrak{ln}\mathbb{R}^\#}$ als symplektische Mannigfaltigkeit	29
6.5	Die Poisson-kommutierenden Funktionen \tilde{H}_k auf $\mathcal{O}_\tilde{p}^{\mathfrak{ln}\mathbb{R}^\#}$	37
7	Das Hamilton-System $(Q, \Phi^*\Omega, h_{Toda})$ und das Toda-Lattice $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0, H_{Toda})$	38
7.1	Vorbereitung: Die Mannigfaltigkeiten $H_1^{-1}(0)$ und $Q = H_1^{-1}(0)/\mathbb{R}$	38
7.2	$(Q, \Phi^*\Omega, h_{Toda})$ als vollständig integrables Hamiltonsches System	40
7.3	Das Toda-Lattice $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0, H_{Toda})$	44
7.4	Explizite Berechnung von h_3 und H_3	49
	Literatur	51

1 Vollständig integrable Hamiltonsche Systeme

Die Hamilton-Funktion des endlichen, nichtperiodischen Toda-Lattice ist gegeben durch:

$$H_{Toda} : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}, (q, p) \longmapsto \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} p_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} e^{(q_k - q_{k+1})}$$

Unser Ziel ist es zu beweisen, dass das Hamilton-System $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0, H_{Toda})$ (wobei $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ den symplektischen Standardraum bezeichne) vollständig integrabel ist, eine seltene Eigenschaft solcher Systeme, die wir zunächst präzisieren wollen.

Definition 1.1: (Lie-Algebra)

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum. Eine bilineare Abbildung $[\cdot, \cdot] : V \times V \longrightarrow V$ heißt *Lie-Klammer* auf V , wenn $[\cdot, \cdot]$

- schiefssymmetrisch ist: $[x, y] = -[y, x] \quad \forall x, y \in V$
- die Jacobi-Identität erfüllt: $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad \forall x, y, z \in V$

$\mathfrak{g} := (V, [\cdot, \cdot])$ heißt dann *Lie-Algebra*.

Definition 1.2: (Poisson-Mannigfaltigkeit)

M sei eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine *Poisson-Klammer* auf M ist eine Abbildung

$$\{\cdot, \cdot\}_M : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

so dass $\{\cdot, \cdot\}_M$

- eine Lie-Klammer auf der Algebra $C^\infty(M)$ ist
- eine Derivation von $C^\infty(M)$ ist: $\{fg, h\}_M = f\{g, h\}_M + \{f, h\}_M g$

$(M, \{\cdot, \cdot\}_M)$ heißt dann *Poisson-Mannigfaltigkeit*.

Definition 1.3: (Poisson-Abbildung)

M, N seien Poisson-Mannigfaltigkeiten. Eine glatte Abbildung $\Phi : M \longrightarrow N$ heißt *Poisson-Abbildung*, wenn gilt:

$$\{f_1 \circ \Phi, f_2 \circ \Phi\}_M = \{f_1, f_2\}_N \circ \Phi \quad \forall f_1, f_2 \in C^\infty(N)$$

Bemerkung 1.4: (Poisson-Struktur einer symplektischen Mannigfaltigkeit)

(M, ω) sei eine symplektische Mannigfaltigkeit. Dann ist M auf kanonische Weise auch eine Poisson-Mannigfaltigkeit: Die symplektische Struktur ermöglicht zunächst den Übergang von Funktionen aus $C^\infty(M)$ zu Vektorfeldern aus $\Gamma^\infty(TM)$:

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(M) & \longrightarrow & \Gamma^\infty(TM) \\ f & \longmapsto & X_f \end{array}$$

wobei das Vektorfeld X_f eindeutig durch die Gleichung $\omega(X_f, \cdot) = df \cdot$ definiert ist. (Bedeutung: $\omega_m(X_f(m), [\gamma]_m) = (d_m f)([\gamma]_m) \quad \forall m \in M, [\gamma]_m \in T_m M$). Die Poisson-Klammer wird dann definiert durch:

$$\begin{array}{ccc} \{\cdot, \cdot\}_M : C^\infty(M) \times C^\infty(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ (f, g) & \longmapsto & \{f, g\}_M := \omega(X_f, X_g) \end{array}$$

(Bedeutung: $\{f, g\}_M(m) = \omega_m(X_f(m), X_g(m)) = (d_m f)(X_g(m))$) Man rechnet die Wohldefiniertheit und die geforderten Eigenschaften nach.

Die Umkehrung gilt nicht: Nicht jede Poisson-Klammer wird von einer symplektischen Form erzeugt. Wir kommen darauf später zurück.

Satz 1.5:

(M, ω) , (N, τ) seien symplektische Mannigfaltigkeiten und $\Phi : M \rightarrow N$ ein Symplektomorphismus. Dann ist Φ auch eine Poisson-Abbildung der kanonischen Poisson-Strukturen.

Zum Beweis vgl. Satz 3.1.15 in [1] (es wird dort sogar die Äquivalenz bewiesen).

Beispiel 1.6: (Die Poisson-Klammer des symplektischen Standardraums $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$)

Man rechnet leicht nach, dass die Poisson-Klammer des symplektischen Standardraums $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ dargestellt in den Standardkoordinaten des \mathbb{R}^{2n} durch

$$\{f, g\}_{\mathbb{R}^{2n}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} \right)$$

gegeben wird.

Definition 1.7: (Vollständige Integrabilität)

Ein Hamilton-System (M, ω, H) (wobei $2n := \dim(M)$) heißt *vollständig integrabel* wenn gilt:
 $\exists H_1, \dots, H_n \in C^\infty(M)$ so dass

- $H_1 = H$
- $\forall m \in M$ sind die $d_m H_k \in \Lambda^1(T_m M)$, $k \in \{1, \dots, n\}$ linear unabhängig
- die H_k kommutieren in der Poisson-Klammer, d.h. $\{H_i, H_j\}_M = 0 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$

Damit können wir nun das Hauptresultat formulieren:

Theorem 1.8:

Das Toda-Lattice $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0, H_{Toda})$ ist ein vollständig integrables Hamiltonsches System.

Zum Beweis orientieren wir uns an den Ideen von Kostant und Symes (vgl. [2], S. 374ff). Wir werden uns darauf beschränken, geeignete Poisson-kommutierende Funktionen zu konstruieren und nicht auf die lineare Unabhängigkeit der Differentiale eingehen. Außerdem werden wir nur eine schwächere Aussage beweisen können, die wir erst später präzise formulieren können. Grob gesagt beweisen wir Theorem 1.8 unter der Voraussetzung dass der Gesamtimpuls des Systems 0 ist.

2 Die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}$

Für den ersten Beweisschritt ist es erforderlich, einen geeigneten Raum zu konstruieren, in dem kommutierende Funktionen \hat{H}_k angegeben werden können. Dazu untersuchen wir die folgenden Räume:

$\mathfrak{sl}_n \mathbb{R} := \{A \in \mathcal{M}_n \mathbb{R} \mid \text{tr}(A) = 0\}$	Matrizen mit Spur 0
$\mathfrak{o}_n \mathbb{R} := \{A \in \mathcal{M}_n \mathbb{R} \mid A^t = -A\} \subset \mathfrak{sl}_n \mathbb{R}$	Schiefsymmetrische Matrizen
$\mathfrak{l}_n \mathbb{R} := \{A \in \mathcal{M}_n \mathbb{R} \mid a_{ij} = 0 \ \forall i < j \text{ und } \text{tr}(A) = 0\} \subset \mathfrak{sl}_n \mathbb{R}$	Untere Dreiecksmatrizen mit Spur 0

Auf $\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}$ ist eine Lie-Klammer definiert, der Kommutator

$$[A, B] = AB - BA$$

so dass $(\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}, [,])$ zu einer Lie-Algebra wird. In der Theorie der Lie-Gruppen wird gezeigt, dass die zugehörige Lie-Gruppe gerade $\text{Sl}_n \mathbb{R} = \{A \in \mathcal{M}_n \mathbb{R} \mid \det A = 1\} \subset \text{Gl}_n \mathbb{R}$ ist. Man rechnet leicht nach, dass $[\mathfrak{o}_n \mathbb{R}, \mathfrak{o}_n \mathbb{R}] \subset \mathfrak{o}_n \mathbb{R}$ und $[\mathfrak{l}_n \mathbb{R}, \mathfrak{l}_n \mathbb{R}] \subset \mathfrak{l}_n \mathbb{R}$, die Einschränkung des Kommutators die Räume $\mathfrak{o}_n \mathbb{R}$ und $\mathfrak{l}_n \mathbb{R}$ also zu Lie-Algebren macht (offenbar sind es wegen der Linearität der Transposition Vektorräume), so genannte *Unter-Lie-Algebren* von $\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}$. Man kann zeigen, dass die Menge

$$L_n \mathbb{R} := \{A \in \mathcal{M}_n \mathbb{R} \mid \det A = 1, a_{ij} = 0 \ \forall i < j \text{ und } a_{i,i} > 0 \ \forall i\} \subset \text{Sl}_n \mathbb{R}$$

(untere Dreiecksmatrizen mit Determinante 1 und positiven Hauptdiagonalelementen) die zur Lie-Algebra $\mathfrak{l}_n\mathbb{R}$ gehörende Lie-Gruppe ist.

Wir benutzen von nun an folgende Notation für bestimmte Teilmatrizen einer Matrix:

$$A = \begin{matrix} & A_- & & & \\ & \parallel & & & \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ * & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 \end{pmatrix} & + & \begin{matrix} & A_0 & & & \\ & \parallel & & & \\ \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix} & + & \begin{matrix} & A_+ & & & \\ & \parallel & & & \\ \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \end{matrix}$$

Lemma 2.1:

Es gilt:

$$\mathfrak{sl}_n\mathbb{R} = \mathfrak{o}_n\mathbb{R} \oplus \mathfrak{l}_n\mathbb{R}$$

Beweis:

Es ist klar, dass $\mathfrak{sl}_n\mathbb{R} \supset \mathfrak{o}_n\mathbb{R} + \mathfrak{l}_n\mathbb{R}$.

$$A \in \mathfrak{o}_n\mathbb{R} \cap \mathfrak{l}_n\mathbb{R} \begin{cases} \xrightarrow{A \in \mathfrak{l}_n\mathbb{R}} A_+ = 0 \\ \xrightarrow{A \in \mathfrak{o}_n\mathbb{R}} A^t = -A \implies A_0 = 0 \text{ und } A_- = -(A_+)^t = 0 \end{cases} \quad \text{also insgesamt: } A = A_- + A_0 + A_+ = 0$$

d.h. es gilt $\mathfrak{o}_n\mathbb{R} \cap \mathfrak{l}_n\mathbb{R} = \{0\}$ und damit ist die Summe direkt: $\mathfrak{sl}_n\mathbb{R} \supset \mathfrak{o}_n\mathbb{R} \oplus \mathfrak{l}_n\mathbb{R}$.

Wir führen folgende Projektionen ein:

$$\begin{matrix} \pi_{\mathfrak{o}_n\mathbb{R}} : \mathfrak{sl}_n\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathfrak{o}_n\mathbb{R} & & \pi_{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}} : \mathfrak{sl}_n\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathfrak{l}_n\mathbb{R} \\ & & A & \longmapsto & A_+ - (A_+)^t & & A & \longmapsto & A_0 + A_- + (A_+)^t \end{matrix}$$

Offensichtlich sind diese Abbildungen wohldefiniert und es ist für $A \in \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$: $\pi_{\mathfrak{o}_n\mathbb{R}}(A) + \pi_{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}}(A) = A$

Damit gilt $\mathfrak{sl}_n\mathbb{R} \subset \mathfrak{o}_n\mathbb{R} \oplus \mathfrak{l}_n\mathbb{R}$ also insgesamt $\mathfrak{sl}_n\mathbb{R} = \mathfrak{o}_n\mathbb{R} \oplus \mathfrak{l}_n\mathbb{R}$. □

Wir führen nun auf $\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$ zusätzlich zur Lie-Algebra Struktur eine nichtausgeartete, symmetrische Bilinearform ein und bestimmen das orthogonale Komplement der Räume $\mathfrak{o}_n\mathbb{R}$ und $\mathfrak{l}_n\mathbb{R}$ bzgl. dieser Form.

Lemma 2.2:

$$\begin{matrix} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{sl}_n\mathbb{R} \times \mathfrak{sl}_n\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A, B) & \longmapsto & \langle A, B \rangle := \text{tr}(AB) \end{matrix}$$

ist eine nichtausgeartete, symmetrische Bilinearform.

Beweis:

Zunächst ist $\text{tr} : \mathfrak{sl}_n\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ linear, denn $\text{tr}(\lambda A + \mu B) = \sum(\lambda a_{ii} + \mu b_{ii}) = \lambda \sum a_{ii} + \mu \sum b_{ii} = \lambda \text{tr}A + \mu \text{tr}B$

Symmetrie: $\langle A, B \rangle = \text{tr}AB = \sum_{l=1}^n (AB)_{ll} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{lk} b_{kl} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n b_{kl} a_{lk} = \sum_{k=1}^n (BA)_{kk} = \text{tr}BA = \langle B, A \rangle$

Bilinearität: $\langle \lambda A + \mu B, C \rangle = \text{tr}(\lambda A + \mu B)C = \text{tr}(\lambda AC + \mu BC) = \lambda \text{tr}AC + \mu \text{tr}BC = \lambda \langle A, C \rangle + \mu \langle B, C \rangle$

Damit folgt die Bilinearität aus der Symmetrie.

Nichtausgeartetheit: Sei $A \in \mathfrak{sl}_n\mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\implies A^t \in \mathfrak{sl}_n\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $(AA^t)_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{ik}^2$

Also: $\langle A, A^t \rangle = \text{tr}AA^t = \sum_{l=1}^n (AA^t)_{ll} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{lk}^2 = \sum_{k,l=1}^n a_{lk}^2 > 0$ wegen $A \neq 0$. □

Lemma 2.3:

Im Raum $(\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt bezüglich der von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierten Orthogonalität:

$$\begin{matrix} \mathfrak{o}_n\mathbb{R}^\perp & = & \{B \in \mathfrak{sl}_n\mathbb{R} \mid B = B^t\} & \text{Symmetrische Matrizen mit Spur 0} \\ \mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\perp & = & \{B \in \mathfrak{sl}_n\mathbb{R} \mid b_{ij} = 0 \ \forall i \leq j\} & \text{Strikte untere Dreiecksmatrizen} \end{matrix}$$

Beweis:

Zunächst ist wegen der Linearität der Transposition klar, dass die angegebenen Mengen Untervektorräume von $\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$ sind. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist nichtausgeartet $\implies \dim(\mathfrak{o}_n\mathbb{R}) + \dim(\mathfrak{o}_n\mathbb{R}^\perp) = \dim(\mathfrak{sl}_n\mathbb{R})$. Man berechnet leicht:

$\dim(\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}) = n^2 - 1$, $\dim(\mathfrak{o}_n\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$ und $\dim(\{B \in \mathfrak{sl}_n\mathbb{R} \mid B = B^t\}) = \frac{(n+2)(n-1)}{2}$

Damit: $\dim(\mathfrak{o}_n\mathbb{R}^\perp) = n^2 - 1 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n+2)(n-1)}{2} = \dim(\{B \in \mathfrak{sl}_n\mathbb{R} \mid B = B^t\})$. Mit einem analogen Dimensionsargument erhält man $\dim(\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\perp) = \dim(\{B \in \mathfrak{sl}_n\mathbb{R} \mid b_{ij} = 0 \forall i \leq j\})$. Es genügt also in beiden Fällen "⊃" zu zeigen:

Sei $B \in \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$ mit $B = B^t$ und $A \in \mathfrak{o}_n\mathbb{R}$. $\text{tr}AB = \langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle = \text{tr}BA = \text{tr}(BA)^t = \text{tr}(\underbrace{A^t}_{=-A} \underbrace{B^t}_{=B}) = -\text{tr}AB$

$\Rightarrow \langle A, B \rangle = \text{tr}AB = 0 \xrightarrow[\text{beliebig}]{A \in \mathfrak{o}_n\mathbb{R}} B \in \mathfrak{o}_n\mathbb{R}^\perp$ Also gilt die erste Gleichheit.

Sei $B \in \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$ mit $b_{ij} = 0 \forall i \leq j$ und $A \in \mathfrak{l}_n\mathbb{R}$, d.h. $a_{ij} = 0 \forall i < j$. $(AB)_{ii} = \sum_{k=1}^n \underbrace{a_{ik}}_{=0 \text{ für } k>i} \underbrace{b_{ki}}_{=0 \text{ für } k \leq i} = 0 \forall i$

$\Rightarrow \langle A, B \rangle = \text{tr}AB = 0 \xrightarrow[\text{beliebig}]{A \in \mathfrak{l}_n\mathbb{R}} B \in \mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\perp$ Also gilt auch die zweite Gleichheit. □

Wir werden von nun an häufig Räume identifizieren müssen. Der Klarheit wegen vereinbaren wir, eine identifizierende Abbildung $V \rightarrow W$ stets mit ι_V^W zu bezeichnen und dementsprechend ihr Inverses mit ι_V^W .

Definition 2.4:

- i. Wir identifizieren den Dualraum

$$\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\# = \{\lambda : \mathfrak{sl}_n\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \lambda \text{ linear}\}$$

mit dem Raum $\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$ durch den Isomorphismus

$$\begin{aligned} \iota_{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}} : \mathfrak{sl}_n\mathbb{R} &\longrightarrow \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\# \\ A &\longmapsto \iota_{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}}(A) := (B \longmapsto \langle A, B \rangle = \text{tr}AB) \end{aligned}$$

(Beachte: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nichtausgeartet $\Rightarrow \iota_{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}}$ ist ein Isomorphismus)

- ii. Für einen Untervektorraum $S \subset \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$ ist

$$S^\perp := \{\lambda \in \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\# \mid \lambda|_S \equiv 0\} \subset \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#$$

der *Annihilator* von S offenbar ein Untervektorraum von $\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#$.

Lemma 2.5:

Es gilt:

$$\mathfrak{o}_n\mathbb{R}^\perp = \iota_{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}}(\mathfrak{o}_n\mathbb{R}^\perp) \text{ und } \mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\perp = \iota_{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}}(\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\perp)$$

Beweis:

Direkt aus Definition 2.4 und der Definition von $\langle \cdot, \cdot \rangle$. □

Bemerkung 2.6:

- Wir betrachten den Dualraum

$$\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\# = \{\mu : \mathfrak{l}_n\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \mu \text{ linear}\}$$

und wollen ihn vermöge der (offenbar isomorphen) Identifikation

$$\begin{aligned} \iota_{\mathfrak{o}_n\mathbb{R}^\perp}^{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#} : \mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\# &\longrightarrow \mathfrak{o}_n\mathbb{R}^\perp \subset \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\# \\ \mu &\longmapsto \left(p \longmapsto \begin{cases} \mu(p) & p \in \mathfrak{l}_n\mathbb{R} \\ 0 & p \in \mathfrak{o}_n\mathbb{R} \end{cases} \right) \end{aligned}$$

(wohldefiniert nach Lemma 2.1) als Teilmenge von $\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#$ auffassen. Wir vereinbaren, durch Punkte Identifikationen kenntlich zu machen und können daher schreiben: $\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\# \doteq \mathfrak{o}_n\mathbb{R}^\perp$ bzw. $\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\# \dot{\subset} \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#$

Analog identifizieren wir: $\mathfrak{o}_n\mathbb{R}^\# \doteq \mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\perp \subset \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#$

- Da offenbar $\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\# = \mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\perp \oplus \mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp$ (wegen Lemma 2.1) können wir unsere bisherigen Ergebnisse in folgender Übersicht zusammenfassen:

$$\begin{array}{rcccl}
\mathfrak{sl}_n \mathbb{R} & = & \mathfrak{o}_n \mathbb{R} & \oplus & \mathfrak{l}_n \mathbb{R} \\
\cdot \parallel & & \iota_{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}}(\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\perp) & & \iota_{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}}(\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp) \\
& & \parallel & & \parallel \\
\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\# & = & \mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\perp & \oplus & \mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp \\
& & \cdot \parallel & & \cdot \parallel \\
& & \mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\# & & \mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#
\end{array}$$

- Wir werden die Abbildung $\iota_{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}} \Big|_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}$ auch mit $\iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}$ bezeichnen da sie wegen Lemma 2.5 auf diesem Teilraum einen Isomorphismus nach $\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp$ darstellt und analog $\iota_{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}} \Big|_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\perp}$ mit $\iota_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\perp}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\perp}$.

3 Der Dualraum einer endlichdimensionalen Lie-Algebra als Poisson-Mannigfaltigkeit

$(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ sei eine endlichdimensionale Lie-Algebra. Wir wollen den Dualraum $\mathfrak{g}^\# = \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ als Poisson-Mannigfaltigkeit erkennen.

Zunächst ist $\mathfrak{g}^\#$ als endlichdimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum eine glatte Mannigfaltigkeit:

$$\mathcal{A} := \{(\mathfrak{g}^\#, \phi) \mid \phi : \mathfrak{g}^\# \rightarrow \mathbb{R}^{\dim(\mathfrak{g}^\#)} \text{ Isomorphismus}\}$$

ist ein C^∞ -diffbarer Atlas da die Kartenwechsel gerade die Isomorphismen $\mathbb{R}^{\dim(\mathfrak{g}^\#)} \rightarrow \mathbb{R}^{\dim(\mathfrak{g}^\#)}$ sind. Wir definieren die differenzierbare Struktur $\mathcal{D}(\mathfrak{g}^\#) := \mathcal{D}(\mathcal{A})$ wodurch $(\mathfrak{g}^\#, \mathcal{D}(\mathfrak{g}^\#))$ zu einer glatten Mannigfaltigkeit wird.

Andererseits sind auf $\mathfrak{g}^\#$ wegen $\dim(\mathfrak{g}^\#) < \infty$ alle Normen äquivalent und der Raum ist vollständig, d.h. ein Banachraum. Wir haben also den Differenzierbarkeitsbegriff eines Banachraumes zur Verfügung, insbesondere für einen anderen Banachraum E die differenzierbaren Funktionen $C^1(\mathfrak{g}^\#, E)$:

$$f \in C^1(\mathfrak{g}^\#, E) \implies f'(\ell) \in \text{Hom}(\mathfrak{g}^\#, E) \quad \forall \ell \in \mathfrak{g}^\#$$

Ist also $f \in C^1(\mathfrak{g}^\#, \mathbb{R})$ so gilt $f'(\ell) \in \mathfrak{g}^{\#\#}$.

Beide Differentialrechnungen sind verträglich in einem nun zu präzisierenden Sinne.

Lemma 3.1:

Für einen endlichdimensionalen \mathbb{R} -Vektorraum E ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc}
\iota_E^{T_p E} : T_p E & \longrightarrow & E \\
[\mu] & \longmapsto & \mu'(0) \Big|_1
\end{array}$$

ein Isomorphismus. Mit ihm identifizieren wir $T_p E \doteq E$.

Beweis:

Sei $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^N$ ein Isomorphismus (d.h. (E, Φ) eine Karte von E).

Wohldefiniertheit: $[f_1] = [f_2] \implies (\Phi \circ f_1)'(0) = (\Phi \circ f_2)'(0)$

$$(\Phi \circ f_i)'(0) = \underbrace{\Phi'(p)}_{\text{=}\Phi \text{ da linear}} \circ f_i'(0) = \Phi \circ f_i'(0) \implies \Phi \circ f_1'(0) = \Phi \circ f_2'(0) \xrightarrow{\Phi \text{ Isomorph.}} f_1'(0) = f_2'(0)$$

Linearität:

$$\begin{aligned}
\lambda[f] + \mu[g] = [h] &\implies \Phi \circ h'(0) = (\Phi \circ h)'(0) \stackrel{\text{Def.}}{=} (\Phi \circ (\lambda f + \mu g))'(0) = \Phi \circ (\lambda f'(0) + \mu g'(0)) \implies \\
h'(0) = \lambda f'(0) + \mu g'(0) &\implies \iota_E^{T_p E}(\lambda[f] + \mu[g]) = \iota_E^{T_p E}([h]) = h'(0) \Big|_1 = \lambda f'(0) \Big|_1 + \mu g'(0) \Big|_1 \\
&= \lambda \iota_E^{T_p E}([f]) + \mu \iota_E^{T_p E}([g])
\end{aligned}$$

Isomorphismus:

$$\begin{aligned}
\text{Wegen } \dim T_p E = \dim E \text{ genügt es, Injektivität zu zeigen. Dazu: } &\iota_E^{T_p E}([f]) = \iota_E^{T_p E}([g]) \\
\implies f'(0) \Big|_1 = g'(0) \Big|_1 \xrightarrow{1 \text{ Basis von } \mathbb{R}} &f'(0) = g'(0) \implies (\Phi \circ f)'(0) = (\Phi \circ g)'(0) \implies [f] = [g] \quad \square
\end{aligned}$$

Satz 3.2: (Verträglichkeit der Differenzierbarkeitsbegriffe)

E, F seien endlichdimensionale \mathbb{R} -Vektorräume, $f \in C^\infty(E, F)$ (im Sinne von glatten Mannigfaltigkeiten) und $p \in E$. Dann sind die beiden Differentiale

$$\begin{aligned} d_p f : T_p E &\longrightarrow T_{f(p)} F && \text{(Differentialbegriff der Mannigfaltigkeit)} \\ f'(p) : E &\longrightarrow F && \text{(Differentialbegriff des Banachraums)} \end{aligned}$$

definiert (d.h. $f \in C^1(E, F)$) und das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} T_p E & \xrightarrow{d_p f} & T_{f(p)} F \\ \downarrow \iota_E^{T_p E} & & \downarrow \iota_F^{T_{f(p)} F} \\ \begin{array}{ccc} [\mu] & \longmapsto & [f \circ \mu] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mu'(0) |_1 & \longmapsto & (f \circ \mu)'(0) |_1 \end{array} & & \\ E & \xrightarrow{f'(p)} & F \end{array}$$

Beweis:

Dies folgt direkt aus der Kettenregel für die Banachraumdifferenzierbarkeit. □

Bemerkung 3.3: (Konstruktion der kanonischen Poisson-Struktur auf $\mathfrak{g}^\#$)

Ist speziell $f \in C^\infty(\mathfrak{g}^\#)$ und $\ell \in \mathfrak{g}^\#$ so können wir also das Differential $d_\ell f$ mit $f'(\ell) \in \mathfrak{g}^{\#\#}$ isomorph identifizieren. Um nun eine Poisson-Klammer auf $C^\infty(\mathfrak{g}^\#)$ zu definieren nutzen wir aus, dass

- $\mathfrak{g}^\#$ Dualraum einer Lie-Algebra ist
- ein kanonischer Isomorphismus

$$\begin{aligned} \iota_{\mathfrak{g}^{\#\#}}^{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g}^{\#\#} \\ v &\longmapsto (\lambda \mapsto \lambda(v)) \end{aligned}$$

existiert, mit dem wir $\mathfrak{g}^{\#\#} \cong \mathfrak{g}$ identifizieren. (Man beachte: $\dim(\mathfrak{g}) < \infty \Rightarrow$ Isomorphismus)

Mit $\iota_{\mathfrak{g}^{\#\#}}^{\mathfrak{g}}$ können wir nun $d_\ell f \in \mathfrak{g}$ auffassen und definieren damit

$$\begin{aligned} \{, \}_{\mathfrak{g}^\#} : C^\infty(\mathfrak{g}^\#) \times C^\infty(\mathfrak{g}^\#) &\longrightarrow C^\infty(\mathfrak{g}^\#) \\ (f, g) &\longmapsto \{f, g\}_{\mathfrak{g}^\#} \quad \text{wobei} \quad \{f, g\}_{\mathfrak{g}^\#}(\ell) := \ell([d_\ell f, d_\ell g]) \quad \forall \ell \in \mathfrak{g}^\# \end{aligned}$$

(Bedeutung: $\{f, g\}_{\mathfrak{g}^\#}(\ell) := \ell([\iota_{\mathfrak{g}^{\#\#}}^{\mathfrak{g}}(f'(\ell)), \iota_{\mathfrak{g}^{\#\#}}^{\mathfrak{g}}(g'(\ell))])$). Man rechnet nach, dass $\{, \}_{\mathfrak{g}^\#}$ wohldefiniert ist und die Eigenschaften einer Poisson-Klammer erfüllt.

Wir haben also (völlig kanonisch) die Poisson-Mannigfaltigkeit $(\mathfrak{g}^\#, \{, \}_{\mathfrak{g}^\#})$ erhalten.

Korollar 3.4:

$\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#, \mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#$ und $\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\#$ sind Poisson-Mannigfaltigkeiten.

4 Adjungierte und coadjungierte Darstellung in $\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}$ und $\mathfrak{l}_n \mathbb{R}$

Wir benötigen später die adjungierte und coadjungierte Darstellung in den Räumen $\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}$ und $\mathfrak{l}_n \mathbb{R}$ und klären daher vorab einige Zusammenhänge zwischen diesen Gruppenoperationen in beiden Räumen.

Definition 4.1: (Adjungierte und coadjungierte Darstellung)

Die Gruppenoperation

- $\times : \mathrm{Sl}_n\mathbb{R} \times \mathfrak{sl}_n\mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$ bzw. $\times : \mathrm{L}_n\mathbb{R} \times \mathfrak{l}_n\mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{l}_n\mathbb{R}$
 $(g, B) \longmapsto g \times B := gBg^{-1}$ $(g, B) \longmapsto g \times B := gBg^{-1}$
 heißt *adjungierte Darstellung* (in $\mathrm{Sl}_n\mathbb{R}$ bzw. $\mathrm{L}_n\mathbb{R}$)
- $\times : \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\# \times \mathrm{Sl}_n\mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#$ bzw. $\times : \mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\# \times \mathrm{L}_n\mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#$
 $(\ell, g) \longmapsto \ell \times g$ wobei $(\ell, g) \longmapsto \ell \times g$ wobei
 $\ell \times g(B) := \ell(g \times B)$ $\ell \times g(B) := \ell(g \times B)$
 heißt *coadjungierte Darstellung* (in $\mathrm{Sl}_n\mathbb{R}$ bzw. $\mathrm{L}_n\mathbb{R}$)
- $\dot{\times} : \mathfrak{sl}_n\mathbb{R} \times \mathfrak{sl}_n\mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$ bzw. $\dot{\times} : \mathfrak{l}_n\mathbb{R} \times \mathfrak{l}_n\mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{l}_n\mathbb{R}$
 $(g, B) \longmapsto g \dot{\times} B := gB - Bg$ $(g, B) \longmapsto g \dot{\times} B := gB - Bg$
 $(= [g, B])$ $(= [g, B])$
 heißt *infinitesimale adjungierte Darstellung* (in $\mathrm{Sl}_n\mathbb{R}$ bzw. $\mathrm{L}_n\mathbb{R}$)
- $\dot{\times} : \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\# \times \mathfrak{sl}_n\mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#$ bzw. $\dot{\times} : \mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\# \times \mathfrak{l}_n\mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#$
 $(\ell, g) \longmapsto \ell \dot{\times} g$ wobei $(\ell, g) \longmapsto \ell \dot{\times} g$ wobei
 $\ell \dot{\times} g(B) := \ell(g \dot{\times} B)$ $\ell \dot{\times} g(B) := \ell(g \dot{\times} B)$
 heißt *infinitesimale coadjungierte Darstellung* (in $\mathrm{Sl}_n\mathbb{R}$ bzw. $\mathrm{L}_n\mathbb{R}$)

(Man rechnet jeweils die Wohldefiniertheit und die Eigenschaften einer Gruppenoperation nach.)

Wegen der Identifikation $\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\# \doteq \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$ können die coadjungierte und infinitesimale coadjungierte Darstellung auch in $\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$ berechnet werden. Außerdem besteht wegen der Identifikation

$$\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\# \doteq \mathfrak{o}_n\mathbb{R}^\perp \doteq \mathfrak{o}_n\mathbb{R}^\perp$$

ein Zusammenhang zwischen der coadjungierten Darstellung in $\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#$ und in $\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#$ und genauso für die infinitesimalen coadjungierten Darstellungen.

Lemma 4.2: (Coadjungierte Darstellung in $\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#$)

Sei $\bar{\ell} \in \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#$, $l := \iota_{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}}(\bar{\ell}) \in \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$. Dann gilt für $g \in \mathrm{Sl}_n\mathbb{R}$:

$$\bar{\ell} \times g = \iota_{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}}(g^{-1}lg)$$

Beweis:

$$\bar{\ell} \times g(B) = \bar{\ell}(g \times B) = \bar{\ell}(gBg^{-1}) = \mathrm{tr}(lgBg^{-1}) \stackrel{\mathrm{tr}AB=\mathrm{tr}BA}{=} \mathrm{tr}(g^{-1}lgB) = \mathrm{tr}(g^{-1}lg)B = \left(\iota_{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}}(g^{-1}lg) \right) (B) \quad \square$$

Definition 4.3:

Wir führen folgende Projektion ein:

$$\pi_{\mathfrak{o}_n\mathbb{R}^\perp} : \mathfrak{sl}_n\mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{o}_n\mathbb{R}^\perp$$

$$A \longmapsto A_0 + A_+ + (A_+)^t$$

Diese ist offenbar wohldefiniert und linear (wegen der Linearität der Transposition).

Satz 4.4: (Coadjungierte Darstellung in $\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#$)

Sei $\ell \in \mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#$, $\bar{\ell} := \iota_{\mathfrak{o}_n\mathbb{R}^\perp}^{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#}(\ell) \in \mathfrak{o}_n\mathbb{R}^\perp \subset \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#$, $l := \iota_{\mathfrak{o}_n\mathbb{R}^\perp}^{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}}(\bar{\ell}) \in \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$. Dann gilt für $g \in \mathrm{L}_n\mathbb{R}$:

$$\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\# \ni \ell \times g = \iota_{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{o}_n\mathbb{R}^\perp} \left(\iota_{\mathfrak{o}_n\mathbb{R}^\perp}^{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}} \left(\pi_{\mathfrak{o}_n\mathbb{R}^\perp}(g^{-1}lg) \right) \right)$$

Beweis:

Zunächst gilt: $\ell \rtimes g = \bar{\ell} \rtimes g|_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}}$ denn: $B \in \mathfrak{l}_n \mathbb{R} \Rightarrow \ell \rtimes g(B) = \ell(g \rtimes B) = \ell(gBg^{-1}) \stackrel{(\star)}{=} \bar{\ell}(gBg^{-1}) = \bar{\ell} \rtimes g(B)$
 (\star) da nach Konstruktion $\ell \equiv \bar{\ell}|_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}}$ und $gBg^{-1} \in \mathfrak{l}_n \mathbb{R}$. Wir rechnen nach, dass gilt

$$\iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}(\ell \rtimes g) = \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}}^{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}(\pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}(g^{-1}lg))$$

woraus die Behauptung folgt, da $\iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}$ ein Isomorphismus ist.

$$\text{Für } B \in \mathfrak{o}_n \mathbb{R} \text{ ist klar: } \left(\iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}(\ell \rtimes g) \right)(B) = 0 = \left(\iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}}^{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}(\pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}(g^{-1}lg)) \right)(B)$$

Für $B \in \mathfrak{l}_n \mathbb{R}$ berechnen wir:

$$\left(\iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}(\ell \rtimes g) \right)(B) = (\bar{\ell} \rtimes g)(B) \stackrel{\text{Lemma 4.2}}{=} \text{tr}((g^{-1}lg)B)$$

$$\left(\iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}}^{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}(\pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}(g^{-1}lg)) \right)(B) = \text{tr}((\pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}(g^{-1}lg))B) \text{ da } \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}}^{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp} \equiv \iota_{\mathfrak{s}\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{s}\mathfrak{l}_n \mathbb{R}} \Big|_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp} \text{ (vgl. Bemerkung 2.6)}$$

$B \in \mathfrak{l}_n \mathbb{R} \Rightarrow B$ ist untere Dreiecksmatrix d.h. $b_{ij} = 0 \forall j > i$. Für ein beliebiges $X \in \mathcal{M}_n \mathbb{R}$ ist dann $(XB)_{kk} = \sum_{j=1}^n X_{kj}b_{jk} = \sum_{j=k}^n X_{kj}b_{jk}$ d.h. in $\text{tr}(XB)$ gehen nur X_{ij} mit $j \geq i$ ein, also nur X_0 und X_+ .

$\Rightarrow \text{tr}((g^{-1}lg)B) = \text{tr}((\pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}(g^{-1}lg))B)$ da $\pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}((g^{-1}lg))_0$ und $((g^{-1}lg))_+$ invariant lässt. \square

Ein analoger Zusammenhang besteht auch für die infinitesimalen coadjungierten Darstellungen:

Lemma 4.5: (Infinitesimale coadjungierte Darstellung in $\mathfrak{s}\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#$)

Sei $\bar{\ell} \in \mathfrak{s}\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#$, $l := \iota_{\mathfrak{s}\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{s}\mathfrak{l}_n \mathbb{R}}(\bar{\ell}) \in \mathfrak{s}\mathfrak{l}_n \mathbb{R}$. Dann gilt für $\gamma \in \mathfrak{s}\mathfrak{l}_n \mathbb{R}$:

$$\bar{\ell} \dot{\times} \gamma = \iota_{\mathfrak{s}\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{s}\mathfrak{l}_n \mathbb{R}}([l, \gamma])$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \bar{\ell} \dot{\times} \gamma(B) &= \bar{\ell}(\gamma \dot{\times} B) = \bar{\ell}([\gamma, B]) = \text{tr}(l[\gamma, B]) = \text{tr}(l(\gamma B - B\gamma)) = \text{tr}(l\gamma B - lB\gamma) = \text{tr}(l\gamma B) - \text{tr}(lB\gamma) \\ &= \text{tr}(l\gamma B) - \text{tr}(\gamma lB) = \text{tr}(l\gamma B - \gamma lB) = \text{tr}((l\gamma - \gamma l)B) = \text{tr}([l, \gamma]B) \\ &= \left(\iota_{\mathfrak{s}\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{s}\mathfrak{l}_n \mathbb{R}}([l, \gamma]) \right)(B) \end{aligned}$$

\square

Satz 4.6: (Infinitesimale coadjungierte Darstellung in $\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#$)

Sei $\ell \in \mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#$, $\bar{\ell} := \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}(\ell) \in \mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp \subset \mathfrak{s}\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#$, $l := \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}}(\bar{\ell}) \in \mathfrak{s}\mathfrak{l}_n \mathbb{R}$. Dann gilt für $\gamma \in \mathfrak{l}_n \mathbb{R}$:

$$\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\# \ni \ell \dot{\times} \gamma = \iota_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}} \left(\iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}}^{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}(\pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}([l, \gamma])) \right)$$

Beweis:

Wie im Beweis zu Satz 4.4 gilt: $\ell \dot{\times} \gamma = \bar{\ell} \dot{\times} \gamma|_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}}$ Wir zeigen wieder, dass gilt

$$\iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}(\ell \dot{\times} \gamma) = \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}}^{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}(\pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}([l, \gamma])) \quad (\star)$$

woraus die Behauptung folgt. Auf $\mathfrak{o}_n \mathbb{R}$ sind beide Seiten von (\star) nach Konstruktion identisch 0. Für $B \in \mathfrak{l}_n \mathbb{R}$ berechnen wir:

$$\left(\iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}(\ell \dot{\times} \gamma) \right)(B) = \bar{\ell} \dot{\times} \gamma(B) \stackrel{\text{Lemma 4.5}}{=} \text{tr}([l, \gamma]B)$$

$$\left(\iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}}^{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}(\pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}([l, \gamma])) \right)(B) = \text{tr}((\pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}([l, \gamma]))B)$$

Mit der gleichen Begründung wie im Beweis zu Satz 4.4 sind hier beide rechten Seiten gleich. \square

Schließlich besteht noch ein wichtiger Zusammenhang zwischen der coadjungierten Darstellung und der infinitesimalen coadjungierten Darstellung, welcher diesen Begriff auch motiviert.

Satz 4.7:

Sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathrm{Sl}_n \mathbb{R}$ eine Kurve mit $\gamma(0) = e$. Wir können γ als Kurve zwischen den Banachräumen \mathbb{R} und $\mathcal{M}_n \mathbb{R}$ auffassen und erhalten $\gamma'(0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n \mathbb{R}$ linear. Dann gilt:

$$\gamma'(0) |_{1 \in \mathfrak{sl}_n \mathbb{R}}$$

Beweis:

$\gamma(t) =: (\gamma_{i,j}(t))_{i,j=1}^n$, $\gamma(t) \in \mathrm{Sl}_n \mathbb{R} \Rightarrow \det(\gamma(t)) \equiv 1$ Mit der Leibniz-Darstellung also:

$$1 \equiv \sum_{\sigma \in S_n} \left(\mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^n \gamma_{k,\sigma(k)}(t) \right) = \prod_{k=1}^n \gamma_{k,k}(t) + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq \mathrm{id}}} \left(\mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^n \gamma_{k,\sigma(k)}(t) \right)$$

Wir dürfen die Ableitung $\gamma'(0) |_1$ komponentenweise bilden und leiten obige Identität ab:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\prod_{k=1}^n \gamma_{k,k}(t) \right)' (0) + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq \mathrm{id}}} \left(\mathrm{sgn}(\sigma) \left(\prod_{k=1}^n \gamma_{k,\sigma(k)}(t) \right)' (0) \right) \\ \Rightarrow 0 &= \sum_{k=1}^n \left(\gamma'_{kk}(0) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \gamma_{l,l}(0) \right) + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq \mathrm{id}}} \left(\mathrm{sgn}(\sigma) \sum_{k=1}^n \left(\gamma'_{k,\sigma(k)}(0) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \gamma_{l,\sigma(l)}(0) \right) \right) \end{aligned}$$

Da $\gamma(0) = e$ ist $\gamma_{l,l}(0) = 1$ und im zweiten Produkt ist stets mindestens eines der $\gamma_{l,\sigma(l)}(0) = 0$ da wegen $\sigma \neq \mathrm{id}$ für mindestens zwei l $\sigma(l) \neq l$ gilt, also erhalten wir:

$$0 = \sum_{k=1}^n (\gamma'_{kk}(0)) + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq \mathrm{id}}} \left(\mathrm{sgn}(\sigma) \sum_{k=1}^n (\gamma'_{k,\sigma(k)}(0) \cdot 0) \right) = \sum_{k=1}^n (\gamma'_{kk}(0)) = \mathrm{tr}(\gamma'(0) |_1)$$

Damit ist $\gamma'(0) |_{1 \in \mathfrak{sl}_n \mathbb{R}}$ wie behauptet. □

Satz 4.8: (Coadjungierte und infinitesimale coadjungierte Darstellung in $\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#$)

Sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathrm{Sl}_n \mathbb{R}$, $t \rightarrow \gamma_t$ eine Kurve mit $\gamma_0 = e$. Dann ist für $\ell \in \mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#$ die Abbildung $\hat{\gamma} := \ell \times \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#$ differenzierbar und es gilt:

$$(\ell \times \gamma_t)' (0) |_1 = \ell \dot{\times} (\gamma'(0) |_1)$$

Beweis:

Nach Lemma 4.2 ist $\ell \times \gamma_t = \iota_{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}} (\gamma_t^{-1} l \gamma_t)$. Die Differenzierbarkeit folgt (da $\iota_{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}}$ ein Isomorphismus, also differenzierbar ist) aus der Differenzierbarkeit von $\gamma_t^{-1} l \gamma_t : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathfrak{sl}_n \mathbb{R}$ und wir berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\ell \times \gamma_t) (0) |_1 &= \frac{d}{dt} \left(\iota_{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}} (\gamma_t^{-1} l \gamma_t) \right) (0) |_1 = \frac{d}{dt} \left(\iota_{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}} \right) (l) \circ \frac{d}{dt} (\gamma_t^{-1} l \gamma_t) (0) |_1 \\ &= \iota_{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}} \left(\frac{d}{dt} (\gamma_t^{-1} l \gamma_t) (0) |_1 \right) = \iota_{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}} \left(\frac{d}{dt} (\gamma_t^{-1}) (0) |_1 l \gamma_0 + \gamma_0^{-1} l \frac{d}{dt} (\gamma_t) (0) |_1 \right) \\ &= \iota_{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}} \left(l \frac{d}{dt} (\gamma_t) (0) |_1 - \frac{d}{dt} (\gamma_t) (0) |_1 l \right) = \iota_{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}} \left([l, \frac{d}{dt} (\gamma_t) (0) |_1] \right) \\ &\stackrel{\text{Lemma 4.5}}{=} \ell \dot{\times} \left(\frac{d}{dt} (\gamma_t) (0) |_1 \right) = \ell \dot{\times} (\gamma'(0) |_1) \end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt (beachte: γ_t^{-1} ist das Inverse Element zu γ_t in $\mathrm{Sl}_n \mathbb{R}$, nicht die Umkehrabbildung):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} (1) (0) |_1 = \frac{d}{dt} (\gamma_t^{-1} \gamma_t) (0) |_1 = \frac{d}{dt} (\gamma_t^{-1}) (0) |_1 \gamma_0 + \gamma_0^{-1} \frac{d}{dt} (\gamma_t) (0) |_1 \\ &= \frac{d}{dt} (\gamma_t^{-1}) (0) |_1 + \frac{d}{dt} (\gamma_t) (0) |_1 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (\gamma_t^{-1}) (0) |_1 &= -\frac{d}{dt} (\gamma_t) (0) |_1 \end{aligned}$$

□

Satz 4.9: (Existenz von Kurven in $Sl_n\mathbb{R}$)

Sei $B \in \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$ und $g \in Sl_n\mathbb{R}$. Dann existiert eine Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Sl_n\mathbb{R}$ mit:

- i. $c(0) = g$
- ii. $c'(0)|_1 = gB$

Beweis:

In der Theorie der Lie-Gruppen beweist man die Existenz der glatten Abbildung $\exp : \mathfrak{sl}_n\mathbb{R} \rightarrow Sl_n\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften $\exp(0) = e$ und $(\exp(tB))'(0)|_1 = B \exp(0B) = B$. Damit definieren wir die glatte Abbildung $c(t) := g \exp(tB)$ und erhalten:

$$\begin{aligned} c(0) &= g \exp(0B) = g \\ c'(0)|_1 &= (g \exp(tB))'(0)|_1 = g((\exp(tB))'(0)|_1) = gB \end{aligned}$$

□

Diese Sätze gelten analog auch in $l_n\mathbb{R}$:

Satz 4.10:

Sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow L_n\mathbb{R}$ eine Kurve mit $\gamma(0) = e$. Dann gilt:

$$\gamma'(0)|_1 \in l_n\mathbb{R}$$

Beweis:

Wir fassen die Kurve γ in $L_n\mathbb{R} \subset Sl_n\mathbb{R}$ als Kurve in $Sl_n\mathbb{R}$ auf, wobei dann $(\gamma_t)_+ \equiv 0$ gilt. Mit Satz 4.7 ist

$$\gamma'(0)|_1 \in \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$$

Da wir komponentenweise ableiten dürfen folgt aber wegen $(\gamma_t)_+ \equiv 0$, dass $(\gamma'(0)|_1)_+ = 0$ gilt. Also ist sogar $\gamma'(0)|_1 \in l_n\mathbb{R}$. □

Satz 4.11: (Coadjungierte und infinitesimale coadjungierte Darstellung in $l_n\mathbb{R}^\#$)

Sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow L_n\mathbb{R}$, $t \rightarrow \gamma_t$ eine Kurve mit $\gamma_0 = e$. Dann ist für $\ell \in l_n\mathbb{R}^\#$ die Abbildung $\hat{\gamma} := \ell \rtimes \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow l_n\mathbb{R}^\#$ differenzierbar und es gilt:

$$(\ell \rtimes \gamma_t)'(0)|_1 = \ell \dot{\rtimes} (\gamma'(0)|_1)$$

Beweis:

Nach Satz 4.4 ist $\ell \rtimes \gamma_t = \iota_{l_n\mathbb{R}^\#}^{\circ_n\mathbb{R}^\perp} (\pi_{\circ_n\mathbb{R}^\perp}(\gamma_t^{-1}l\gamma_t))$. Die Differenzierbarkeit folgt (da $\iota_{l_n\mathbb{R}^\#}^{\circ_n\mathbb{R}^\perp}$ ein Isomorphismus und $\pi_{\circ_n\mathbb{R}^\perp}$ linear, also differenzierbar sind) aus der Differenzierbarkeit von $\gamma_t^{-1}l\gamma_t : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$ und wir berechnen wie im Beweis zu Satz 4.8:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\ell \rtimes \gamma_t)(0)|_1 &= \iota_{l_n\mathbb{R}^\#}^{\circ_n\mathbb{R}^\perp} (\pi_{\circ_n\mathbb{R}^\perp} (\frac{d}{dt} (\gamma_t^{-1}l\gamma_t)(0)|_1)) = \iota_{l_n\mathbb{R}^\#}^{\circ_n\mathbb{R}^\perp} (\pi_{\circ_n\mathbb{R}^\perp} ([l, \frac{d}{dt} (\gamma_t)(0)|_1])) \\ &\stackrel{\text{Satz 4.6}}{=} \ell \dot{\rtimes} (\frac{d}{dt} (\gamma_t)(0)|_1) = \ell \dot{\rtimes} (\gamma'(0)|_1) \end{aligned}$$

□

Satz 4.12: (Existenz von Kurven in $L_n\mathbb{R}$)

Sei $B \in l_n\mathbb{R}$ und $g \in L_n\mathbb{R}$. Dann existiert eine Kurve $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow L_n\mathbb{R}$ mit:

- i. $c(0) = g$
- ii. $c'(0)|_1 = gB$

Der Beweis erfolgt völlig analog zum Beweis von Satz 4.9 mit der Exponentialabbildung $\exp : l_n\mathbb{R} \rightarrow L_n\mathbb{R}$.

Vieles aus diesem Abschnitt ist nicht an unsere konkreten Räume gebunden, sondern gilt allgemeiner für Lie-Algebren \mathfrak{g} . Da wir die Theorie der Lie-Gruppen weitgehend nicht als bekannt voraussetzen wollen haben wir alle Aussagen nur für die konkreten Räume formuliert, in denen die Beweise direkt funktionieren.

5 Konstruktion Poisson-kommutierender Funktionen auf $\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#$

5.1 Das Lemma von Kostant-Symes

$\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#$ und $\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#$ sind kanonisch Poisson-Mannigfaltigkeiten. Außerdem haben wir die Identifikation

$$\iota_{\mathfrak{o}_n\mathbb{R}}^{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#} : \mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\# \longrightarrow \mathfrak{o}_n\mathbb{R} \subset \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#$$

welche linear also nach Konstruktion der differenzierbaren Strukturen auf $\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#$ und $\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#$ glatt ist. Da $\iota_{\mathfrak{o}_n\mathbb{R}}^{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#}(\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#) = \mathfrak{o}_n\mathbb{R}$ als Untervektorraum von $\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#$ eine Untermannigfaltigkeit ist, ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi : \mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\# &\hookrightarrow \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\# \\ \ell &\mapsto \iota_{\mathfrak{o}_n\mathbb{R}}^{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#}(\ell) \end{aligned}$$

eine Einbettung. Obwohl diese Einbettung keine Poisson-Abbildung ist besteht zwischen den Poisson-Klammern in beiden Räumen ein Zusammenhang, welchen das Lemma von Kostant-Symes formuliert. Wir führen wieder alle Beweise für unsere konkreten Räume obwohl die Aussagen auch allgemeiner gelten.

Definition 5.1.1: ($\mathrm{Sl}_n\mathbb{R}$ -invariante Funktion)

$f : \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\# \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt $\mathrm{Sl}_n\mathbb{R}$ -invariant

$$:\Leftrightarrow f(\ell \times g) = f(\ell) \quad \forall g \in \mathrm{Sl}_n\mathbb{R} \quad \forall \ell \in \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#$$

d.h. wenn f auf den Orbits $\ell \times \mathrm{Sl}_n\mathbb{R}$ der coadjungierten Darstellung konstant ist.

Lemma 5.1.2:

Sei $f \in C^\infty(\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#)$ $\mathrm{Sl}_n\mathbb{R}$ -invariant. Dann gilt:

$$\ell([g, d_\ell f]) = 0 \quad \forall g \in \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}, \quad \forall \ell \in \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\# \quad \text{oder kurz:} \quad \ell([\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}, d_\ell f]) = 0$$

wobei wir $d_\ell f \in \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$ auffassen.

Beweis:

Zu beliebigem $g \in \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$ kann nach dem Existenzsatz 4.9 eine Kurve $\hat{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathrm{Sl}_n\mathbb{R}$ mit $\hat{\gamma}(0) = e$ und $\hat{\gamma}'(0)|_1 = g$ konstruiert werden, so dass nach Satz 4.8 für die Kurve $\gamma := \ell \times \hat{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#$ gilt:

$$(\ell \times \hat{\gamma})'(0)|_1 = \ell \dot{\times} g$$

Für diese Kurve folgt:

$$\begin{aligned} d_\ell f([\gamma]) &= [f \circ \gamma] = [t \mapsto f(\ell \times \hat{\gamma}(t))] = [t \mapsto f(\ell)] = 0 \in T_{f(\ell)}\mathbb{R} \\ &\stackrel{\text{vgl.}}{\implies} f'(\ell)(\gamma'(0)|_1) = 0 \in \mathbb{R} \\ &\text{Satz 3.2} \end{aligned}$$

Da wir die Identifikation $\mathfrak{sl}_n\mathbb{R} \doteq \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^{\#\#}$ mit dem Isomorphismus

$$\begin{aligned} \iota_{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^{\#\#}}^{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}} : \mathfrak{sl}_n\mathbb{R} &\longrightarrow \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^{\#\#} \\ v &\longmapsto (\lambda \mapsto \lambda(v)) \end{aligned}$$

vorgenommen haben (vgl. Bemerkung 3.3) folgt:

$$0 = \underbrace{f'(\ell)}_{\in \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^{\#\#}}(\ell \dot{\times} g) = (\ell \dot{\times} g)(\underbrace{d_\ell f}_{\in \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}}) \stackrel{\text{Def.}}{=} \ell(g \dot{\times} d_\ell f) = \ell([g, d_\ell f])$$

□

Korollar 5.1.3:

Sei $f \in C^\infty(\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#)$ $\mathrm{Sl}_n\mathbb{R}$ -invariant und $h \in C^\infty(\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#)$. Dann gilt

$$\{f, h\}_{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#} = 0$$

d.h. insbesondere Poisson-kommutieren alle $\mathrm{Sl}_n\mathbb{R}$ -invarianten Funktionen auf $\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#$.

Beweis:

$$\{f, h\}_{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#}(\ell) \stackrel{\text{Def.}}{=} \ell([d_\ell f, d_\ell h]) = -\ell([\underset{\in \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}}{d_\ell h}, d_\ell f]) = 0 \quad (\text{wegen Lemma 5.1.2}) \quad \square$$

Lemma 5.1.4:

Sei $\ell \in \mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#$ und $f \in C^\infty(\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#)$. Wir setzen $f_- := f \circ \Psi \in C^\infty(\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#)$ (also $f_- = f \circ \iota_{\mathfrak{o}_n\mathbb{R}}^{\perp \mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#}$). Außerdem sei

$\bar{\ell} := \iota_{\mathfrak{o}_n\mathbb{R}}^{\perp \mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#}(\ell) \in \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#$ (die Nullfortsetzung von ℓ). Dann gilt:

$$d_\ell(f_-) = (d_{\bar{\ell}}f)_-$$

wobei $(d_{\bar{\ell}}f)_-$ definiert wird durch

$$\begin{aligned} d_{\bar{\ell}}f &= (d_{\bar{\ell}}f)_- + (d_{\bar{\ell}}f)_+ \\ \in &\quad \in \quad \in \\ \mathfrak{sl}_n\mathbb{R} &= \mathfrak{l}_n\mathbb{R} \oplus \mathfrak{o}_n\mathbb{R} \end{aligned}$$

(Wir fassen wie in Bemerkung 3.3 beschrieben das Differential $d_\ell(f_-) : T_\ell\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\# \rightarrow T_{f_-(\ell)}\mathbb{R}$ als Element von $\mathfrak{l}_n\mathbb{R}$ und das Differential $d_{\bar{\ell}}f : T_{\bar{\ell}}\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\# \rightarrow T_{f(\bar{\ell})}\mathbb{R}$ als Element von $\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$ auf.)

Beweis:

$$\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#\# \ni f'(\bar{\ell}) \stackrel{\text{Def.}}{=} \iota_{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#\#}^{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}}(d_{\bar{\ell}}f) = \iota_{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#\#}^{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}}((d_{\bar{\ell}}f)_- + (d_{\bar{\ell}}f)_+) \stackrel{\iota \text{ linear}}{=} \iota_{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#\#}^{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}}((d_{\bar{\ell}}f)_-) + \iota_{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#\#}^{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}}((d_{\bar{\ell}}f)_+)$$

Für $x \in \mathfrak{o}_n\mathbb{R} \subset \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#$ ist $\iota_{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#\#}^{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}}((d_{\bar{\ell}}f)_+)(x) \stackrel{\text{Def.}}{=} x((d_{\bar{\ell}}f)_+) = 0$ da $(d_{\bar{\ell}}f)_+ \in \mathfrak{o}_n\mathbb{R}$ und $x|_{\mathfrak{o}_n\mathbb{R}} \equiv 0$ wegen $x \in \mathfrak{o}_n\mathbb{R}$.

Also:

$$\begin{aligned} f'(\bar{\ell})|_{\mathfrak{o}_n\mathbb{R}} &= \iota_{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#\#}^{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}}((d_{\bar{\ell}}f)_-)|_{\mathfrak{o}_n\mathbb{R}} \\ \Rightarrow f'(\bar{\ell}) \circ \iota_{\mathfrak{o}_n\mathbb{R}}^{\perp \mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#} &= \iota_{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#\#}^{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}}((d_{\bar{\ell}}f)_-) \circ \iota_{\mathfrak{o}_n\mathbb{R}}^{\perp \mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#} \quad (\star) \end{aligned}$$

Wir berechnen: $f'_-(\ell) = \left(f \circ \iota_{\mathfrak{o}_n\mathbb{R}}^{\perp \mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#}\right)'(\ell) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \underbrace{f' \left(\iota_{\mathfrak{o}_n\mathbb{R}}^{\perp \mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#}(\ell)\right)}_{=\bar{\ell}} \circ \underbrace{\left(\iota_{\mathfrak{o}_n\mathbb{R}}^{\perp \mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#}\right)'}_{\text{linear!}}(\ell) = f'(\bar{\ell}) \circ \iota_{\mathfrak{o}_n\mathbb{R}}^{\perp \mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#}$

Da $f'_-(\ell) = \iota_{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#\#}^{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}}(d_\ell(f_-))$ folgt damit aus (\star) :

$$\iota_{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#\#}^{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}}(d_\ell(f_-)) = f'_-(\ell) = f'(\bar{\ell}) \circ \iota_{\mathfrak{o}_n\mathbb{R}}^{\perp \mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#} \stackrel{(\star)}{=} \iota_{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#\#}^{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}}((d_{\bar{\ell}}f)_-) \circ \iota_{\mathfrak{o}_n\mathbb{R}}^{\perp \mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#} \quad \text{Also: } \iota_{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#\#}^{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}}(d_\ell(f_-)) = \iota_{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#\#}^{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}}((d_{\bar{\ell}}f)_-) \circ \iota_{\mathfrak{o}_n\mathbb{R}}^{\perp \mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#} \quad (\star\star)$$

Sei nun $\gamma \in \mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#$ gewählt. Dann gilt: $\iota_{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#\#}^{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}}((d_{\bar{\ell}}f)_-)(\gamma) \stackrel{\text{Def.}}{=} \gamma((d_{\bar{\ell}}f)_-) \in \mathbb{R}$. Andererseits berechnet man:

$$\left(\iota_{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#\#}^{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}}((d_{\bar{\ell}}f)_-)\right) \underbrace{\left(\iota_{\mathfrak{o}_n\mathbb{R}}^{\perp \mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#}(\gamma)\right)}_{=: \hat{\gamma} \in \mathfrak{o}_n\mathbb{R} \subset \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#} = \left(\iota_{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}^\#\#}^{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}}((d_{\bar{\ell}}f)_-)\right) \underbrace{(\hat{\gamma})}_{\text{Def.}} \stackrel{\text{Def.}}{=} \hat{\gamma}((d_{\bar{\ell}}f)_-) = \underbrace{\left(\iota_{\mathfrak{o}_n\mathbb{R}}^{\perp \mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#}(\gamma)\right)}_{\equiv \gamma \text{ auf } \mathfrak{l}_n\mathbb{R}} \underbrace{((d_{\bar{\ell}}f)_-)}_{\in \mathfrak{l}_n\mathbb{R}} = \gamma((d_{\bar{\ell}}f)_-)$$

Da $\gamma \in \mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#$ beliebig war gilt damit die Gleichung $\iota_{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#\#}^{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}}(d_\ell(f_-)) \circ \iota_{\mathfrak{o}_n\mathbb{R}}^{\perp \mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#} = \iota_{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#\#}^{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}}((d_{\bar{\ell}}f)_-)$ also folgt aus $(\star\star)$:

$$\iota_{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#\#}^{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}}(d_\ell(f_-)) = \iota_{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#\#}^{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}}((d_{\bar{\ell}}f)_-) \stackrel{\iota \text{ Isomorphismus}}{\implies} d_\ell(f_-) = (d_{\bar{\ell}}f)_-$$

\square

Satz 5.1.5: (Lemma von Kostant-Symes)

Seien $f^1, f^2 \in C^\infty(\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#)$ $\mathrm{Sl}_n \mathbb{R}$ -invariant, dann gilt:

$$\{f^1 \circ \Psi, f^2 \circ \Psi\}_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} = 0$$

Beweis:

$f_-^1 := f^1 \circ \Psi, f_-^2 := f^2 \circ \Psi$. Sei $\ell \in \mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#$ und $\bar{\ell} := \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}(\ell) \in \mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#$ (d.h. $\bar{\ell}|_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}} \equiv 0$).

$$\begin{aligned} \{f^1 \circ \Psi, f^2 \circ \Psi\}_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}(\ell) &\stackrel{\text{Def.}}{=} \ell([d_\ell(f_-^1), d_\ell(f_-^2)]) \stackrel{\text{Lemma 5.1.4}}{=} \ell([(d_{\bar{\ell}}f^1)_-, (d_{\bar{\ell}}f^2)_-]) \\ &= \underbrace{\ell([(d_{\bar{\ell}}f^1)_-, d_{\bar{\ell}}f^2 - (d_{\bar{\ell}}f^2)_+])}_{\in \mathfrak{l}_n \mathbb{R}} = \bar{\ell}([(d_{\bar{\ell}}f^1)_-, d_{\bar{\ell}}f^2 - (d_{\bar{\ell}}f^2)_+]) \text{ (denn } \ell \equiv \bar{\ell} \text{ auf } \mathfrak{l}_n \mathbb{R}) \\ &= \underbrace{\bar{\ell}([(d_{\bar{\ell}}f^1)_-, d_{\bar{\ell}}f^2])}_{=0 \text{ nach Lemma 5.1.2}} - \bar{\ell}([(d_{\bar{\ell}}f^1)_-, (d_{\bar{\ell}}f^2)_+]) = -\bar{\ell}([d_{\bar{\ell}}f^1 - (d_{\bar{\ell}}f^1)_+, (d_{\bar{\ell}}f^2)_+]) \\ &\stackrel{\text{da } f^2 \text{ Sl}_n \mathbb{R}\text{-invariant}}{=} -\bar{\ell}([d_{\bar{\ell}}f^1, (d_{\bar{\ell}}f^2)_+]) + \bar{\ell}([(d_{\bar{\ell}}f^1)_+, (d_{\bar{\ell}}f^2)_+]) = \bar{\ell}(\underbrace{[(d_{\bar{\ell}}f^1)_+, (d_{\bar{\ell}}f^2)_+]}_{\substack{\in \mathfrak{o}_n \mathbb{R} \quad \in \mathfrak{o}_n \mathbb{R} \\ \in \mathfrak{o}_n \mathbb{R} \text{ da Unter-Lie-Algebra}}}) \\ &\stackrel{\text{da } f^1 \text{ Sl}_n \mathbb{R}\text{-invariant}}{=} 0 \text{ wegen } \bar{\ell}|_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}} \equiv 0 \end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.1.6:

Dass $\{f^1, f^2\}_{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#} = 0$ war bereits nach Korollar 5.1.3 bekannt. Das Lemma von Kostant-Symes garantiert, dass speziell für $\mathrm{Sl}_n \mathbb{R}$ -invariante Funktionen auf $\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#$ die Einbettung $\Psi : \mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\# \hookrightarrow \mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#$ die Poisson-Kommutativität erhält. Ψ ist keine Poisson-Abbildung, was eine viel stärkere Aussage wäre. Für unsere Zwecke genügt aber bereits die schwache Aussage aus dem Lemma von Kostant-Symes.

5.2 Die Poisson-kommutierenden Funktionen \tilde{H}_k auf $\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#$

Wir benutzen nun die Aussagen aus dem letzten Abschnitt, zur Konstruktion Poisson-kommutierender Funktionen auf $\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#$. Dazu definieren wir:

$$\begin{aligned} \hat{H}_k : \mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\# &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto \frac{1}{k} \mathrm{tr}((\iota_{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#}(P))^k) \end{aligned}$$

Offenbar gilt $\hat{H}_k \in C^\infty(\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#) \forall k \in \mathbb{N}$ und $\hat{H}_1 \equiv 0$. Wir werden im wesentlichen die Funktionen \hat{H}_k für $k \in \{2, \dots, n\}$ betrachten, wobei \hat{H}_1 trotz seiner Trivialität noch eine Rolle spielen wird. Für $\ell \in \mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#$ (mit $l := \iota_{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#}(\ell)$ wie üblich) und $g \in \mathrm{Sl}_n \mathbb{R}$ berechnet man:

$$\begin{aligned} \hat{H}_k(\ell \times g) &\stackrel{\text{Lemma 4.2}}{=} \hat{H}_k(\iota_{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#}(g^{-1}lg)) = \frac{1}{k} \mathrm{tr}((\iota_{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#}(\iota_{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#}(g^{-1}lg)))^k) = \frac{1}{k} \mathrm{tr}((g^{-1}lg)^k) \\ &= \frac{1}{k} \mathrm{tr}(g^{-1}l^k g) = \frac{1}{k} \mathrm{tr}(gg^{-1}l^k) = \frac{1}{k} \mathrm{tr}(l^k) = \frac{1}{k} \mathrm{tr}((\iota_{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#}(\ell))^k) \\ &= \hat{H}_k(\ell) \end{aligned}$$

d.h. die \hat{H}_k sind $\mathrm{Sl}_n \mathbb{R}$ -invariant, Poisson-kommutieren also nach Korollar 5.1.3 auf $\mathfrak{sl}_n \mathbb{R}^\#$. Dieser Raum ist aber für unsere Zwecke zu groß. Deshalb betrachten wir:

$$\tilde{H}_k \in C^\infty(\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#) \quad \text{definiert durch:} \quad \tilde{H}_k := \hat{H}_k \circ \Psi \quad \left(= \hat{H}_k \circ \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} \right)$$

Nach dem Lemma von Kostant-Symes Poisson-kommutieren die \tilde{H}_k auf $\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#$.

6 Der coadjungierte Orbit $\mathcal{O}_{\tilde{p}}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}$ als symplektische Mannigfaltigkeit

6.1 Zerblatterung einer Poisson-Mannigfaltigkeit in symplektische Untermannigfaltigkeiten

Der Raum $\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#$ als Definitionsbereich der \tilde{H}_k ist immer noch zu groß. Daher werden wir ihn ein weiteres Mal einschränken, wobei wir für die eingeschränkten Funktionen die Poisson-Kommutativität erhalten wollen. Dazu ist es notwendig eine geeignete Poisson-Untermannigfaltigkeit zu finden.

Theorem: (Symplektische Blatterung)

Jede Poisson-Mannigfaltigkeit lässt sich kanonisch in symplektische Untermannigfaltigkeiten (verschiedener Dimension) “zerblattern” (d.h. als Vereinigung disjunkter Untermannigfaltigkeiten darstellen), die *symplektischen Blätter*.

Zum Beweis siehe [1] Abschnitt 4.1.4, insbesondere Satz 4.1.31.

Betrachtet man speziell den Dualraum einer endlichdimensionalen Lie-Algebra als Poisson-Mannigfaltigkeit, so lassen sich die symplektischen Blätter direkt angeben:

Satz: (Symplektische Blätter von $\mathfrak{g}^\#$)

Sei $\mathfrak{g}^\#$ der Dualraum einer Lie-Algebra \mathfrak{g} mit Lie-Gruppe G so sind die symplektischen Blätter von $\mathfrak{g}^\#$ gerade die Orbits

$$\mathcal{O}_\ell := \ell \rtimes G \quad \ell \in \mathfrak{g}^\#$$

der coadjungierten Darstellung.

Zum Beweis siehe [1] Aufgabe 4.7.

Wir werden nun ein bestimmtes symplektisches Blatt von $\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#$ untersuchen und alle dafür notwendigen Rechnungen und Konstruktionen direkt durchführen ohne diese Sätze zu verwenden. Sie sollen unser Vorgehen lediglich motivieren. Wir werden folgenden wichtigen Satz aus der Theorie der Lie-Gruppen benötigen:

Satz 6.1.1: (Abgeschlossene Untergruppen einer Lie-Gruppe)

Sei G eine Lie-Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe. Dann gilt:

- H ist eine Untermannigfaltigkeit von G und damit selbst eine Lie-Gruppe
- Es existiert genau eine differenzierbare Struktur auf dem Quotienten G/H ($= \{[g]_\sim \mid g \in G\}$ wobei $g \sim h \Leftrightarrow gh^{-1} \in H$) so dass
 - die Projektion $\pi_{G/H} : G \rightarrow G/H$ glatt ist
 - $\forall p \in G/H$ existiert eine Umgebung $p \in U \subset G/H$ und eine glatte Abbildung $\varphi : U \rightarrow G$ mit $\pi_{G/H} \circ \varphi = id_U$
 - die durch $(g, kH) \rightarrow gkH$ definierte Gruppenoperation von G auf G/H glatt ist

Zum Beweis siehe [3], Satz 7 in Abschnitt 6.2.

Definition 6.1.2: (Stabilisator einer Gruppenoperation)

Sei H eine Gruppe, X eine Menge und $\cdot : H \times X \rightarrow X$ eine Gruppenoperation. Für $\ell \in X$ heißt die Menge

$$S_\ell := \{h \in H \mid h \cdot \ell = \ell\} \subset H$$

der *Stabilisator* von ℓ . S_ℓ ist stets eine Untergruppe von H wie man leicht nachrechnet.

Bemerkung 6.1.3: (Die Orbits $\mathcal{O}_\ell^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}$ als Untermannigfaltigkeiten von $\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#$)

Sei $\ell \in \mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#$. Wir wollen $\mathcal{O}_\ell^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} := \ell \times \mathbb{L}_n \mathbb{R}$ als Untermannigfaltigkeit von $\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#$ erkennen. Dazu betrachten wir den Stabilisator S_ℓ . Man rechnet nach, dass dieser sogar eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{L}_n \mathbb{R}$ ist, also nach Satz 6.1.1 eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{L}_n \mathbb{R}$ und der Quotient $\mathbb{L}_n \mathbb{R} / S_\ell$ eine glatte Mannigfaltigkeit. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi_\ell : \mathbb{L}_n \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{O}_\ell^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} \\ g &\longmapsto \ell \times g \end{aligned}$$

ist per Definition surjektiv. Zur Injektivität: $\Phi(g) = \Phi(f) \Rightarrow \ell \times g = \ell \times f \Rightarrow (\ell \times g) \times f^{-1} = (\ell \times f) \times f^{-1} \Rightarrow (\ell \times g f^{-1}) = (\ell \times f f^{-1}) = \ell \Rightarrow g f^{-1} \in S_\ell \Rightarrow [g] = [f]$ in $\mathbb{L}_n \mathbb{R} / S_\ell$

Damit gibt Φ_ℓ Anlass zu einer wohldefinierten bijektiven Abbildung

$$\begin{aligned} \pi_\ell : \mathbb{L}_n \mathbb{R} / S_\ell &\longrightarrow \mathcal{O}_\ell^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} \\ [g] &\longmapsto \ell \times g \end{aligned}$$

Man kann zeigen (vgl. [1], Proposition 3.3.24) dass $\pi_\ell : \mathbb{L}_n \mathbb{R} / S_\ell \rightarrow \mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#$ eine injektive Immersion und $\mathcal{O}_\ell^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}$ eine (zu $\mathbb{L}_n \mathbb{R} / S_\ell$ diffeomorphe) Untermannigfaltigkeit von $\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#$ ist.

Wir werden von nun an die kanonische Projektion $\mathbb{L}_n \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}_n \mathbb{R} / S_\ell$ mit τ_ℓ bezeichnen.

6.2 Der coadjungierte Orbit $\mathcal{O}_\dot{p}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}$

Wir definieren

$$P := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp \subset \mathfrak{sl}_n \mathbb{R} \quad p := \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^\perp(P) \in \mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp \quad \dot{p} := \iota_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}^\perp(p)$$

Wir werden den coadjungierten Orbit $\mathcal{O}_\dot{p}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} = \dot{p} \times \mathbb{L}_n \mathbb{R} \subset \mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#$ untersuchen. Wir definieren dazu

$$\mathcal{O}^{\dot{p}} := \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^\perp \left(\iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} \left(\mathcal{O}_\dot{p}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} \right) \right) \subset \mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp \subset \mathfrak{sl}_n \mathbb{R}$$

Durch diese Definition und da $\iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^\perp \circ \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}$ ein Isomorphismus ist erhalten wir durch Einschränkung sofort eine bijektive Abbildung

$$\iota_{\mathcal{O}^{\dot{p}}}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} := \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^\perp \circ \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} \Big|_{\mathcal{O}_\dot{p}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}}$$

Wir werden sehen, dass $\mathcal{O}_\dot{p}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}$ kein Vektorraum ist. Diese Abbildung ist also nur bijektiv und besitzt sonst zunächst keine weiteren strukturerhaltenden Eigenschaften. Nach Satz 4.4 wissen wir bereits:

$$\mathcal{O}^{\dot{p}} \ni \iota_{\mathcal{O}^{\dot{p}}}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}(\dot{p} \times g) = \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^\perp \left(\iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}(\dot{p} \times g) \right) = \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}(g^{-1} P g)$$

Wir wollen $\mathcal{O}^{\dot{p}}$ konkret berechnen und beweisen dazu zunächst folgendes technische Lemma:

Lemma 6.2.1:

Sei $\bar{\ell} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & 0 \\ b_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp$ mit $b_k > 0 \forall k$ und $g = \begin{pmatrix} g_{1,1} & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ g_{n,1} & \cdots & \cdots & g_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{L}_n \mathbb{R}$.

Dann gilt für $X = (x_{i,j})_{i,j=1}^n := \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}(g^{-1} \bar{\ell} g) \in \mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp$:

- $x_{i,j} = x_{j,i} = 0 \quad \forall j > i + 1$

- $x_{i,i+1} = x_{i+1,i} = b_i \frac{g_{i+1,i+1}}{g_{i,i}} > 0$ für $i \in \{1, \dots, n-1\}$
- $x_{i,i} = a_i + b_i \frac{g_{i+1,i}}{g_{i,i}} - b_{i-1} \frac{g_{i,i-1}}{g_{i-1,i-1}}$ für $i \in \{2, \dots, n-1\}$
 $x_{1,1} = a_1 + b_1 \frac{g_{2,1}}{g_{1,1}}$
 $x_{n,n} = a_n - b_{n-1} \frac{g_{n,n-1}}{g_{n-1,n-1}}$

z.B. im Fall $n = 4$:

$$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \frac{g_{2,1}}{g_{1,1}} & b_1 \frac{g_{2,2}}{g_{1,1}} & 0 & 0 \\ b_1 \frac{g_{2,2}}{g_{1,1}} & a_2 + b_2 \frac{g_{3,2}}{g_{2,2}} - b_1 \frac{g_{2,1}}{g_{1,1}} & b_2 \frac{g_{3,3}}{g_{2,2}} & 0 \\ 0 & b_2 \frac{g_{3,3}}{g_{2,2}} & a_3 + b_3 \frac{g_{4,3}}{g_{3,3}} - b_2 \frac{g_{3,2}}{g_{2,2}} & b_3 \frac{g_{4,4}}{g_{3,3}} \\ 0 & 0 & b_3 \frac{g_{4,4}}{g_{3,3}} & a_4 - b_3 \frac{g_{4,3}}{g_{3,3}} \end{pmatrix}$$

Beweis:

Wir setzen

$$\bar{\ell} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}}_{=: \bar{\ell}^1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & b_1 & & 0 \\ b_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}}_{=: \bar{\ell}^2}$$

$$\Rightarrow X = \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}(g^{-1} \bar{\ell} g) = \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}(g^{-1}(\bar{\ell}^1 + \bar{\ell}^2)g) = \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}(g^{-1} \bar{\ell}^1 g + g^{-1} \bar{\ell}^2 g) = \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}(g^{-1} \bar{\ell}^1 g) + \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}(g^{-1} \bar{\ell}^2 g)$$

Zu $\pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}(g^{-1} \bar{\ell}^1 g)$: $g, \bar{\ell}^1, g^{-1}$ untere Dreiecksmatrizen $\Rightarrow g^{-1} \bar{\ell}^1 g$ ist untere Dreiecksmatrix, d.h. wegen $\pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}$ genügt es die Hauptdiagonale zu berechnen: $Y := g^{-1} \bar{\ell}^1 g \Rightarrow \bar{\ell}^1 g = gY$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \bar{\ell}_{i,k}^1 g_{k,i} = \sum_{k=1}^n \underbrace{g_{i,k}}_{=0 \text{ für } k>i} \underbrace{y_{k,i}}_{=0 \text{ für } i>k} = g_{i,i} y_{i,i}$$

$$\text{Damit: } g_{i,i} y_{i,i} = \sum_{k=1}^n \underbrace{\bar{\ell}_{i,k}^1}_{=0 \text{ für } i \neq k} g_{k,i} = \bar{\ell}_{i,i}^1 g_{i,i} = a_i g_{i,i} \Rightarrow y_{i,i} = a_i \text{ denn nach Voraussetzung ist } g_{i,i} > 0$$

$$\Rightarrow \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}(g^{-1} \bar{\ell}^1 g) = \bar{\ell}^1$$

Zu $\pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}(g^{-1} \bar{\ell}^2 g)$: $Z := g^{-1} \bar{\ell}^2 g \Rightarrow \bar{\ell}^2 g = gZ$

- Für $j > 2$ und $i \in \{1, \dots, j-2\}$ gilt ($\Leftrightarrow j > i+1$):

$$\sum_{k=1}^n g_{i,k} z_{k,j} = \sum_{k=1}^n \underbrace{\bar{\ell}_{i,k}^2}_{=0 \text{ für } k>i+1} g_{k,j} = \sum_{k=1}^{i+1} \bar{\ell}_{i,k}^2 \underbrace{g_{k,j}}_{=0 \text{ da } j>i+1 \geq k} = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^n \underbrace{g_{i,k}}_{=0 \text{ für } k>i} z_{k,j} = \sum_{k=1}^i g_{i,k} z_{k,j}$$

$$\text{Also: } \sum_{k=1}^i g_{i,k} z_{k,j} = 0$$

Für festes $j > 2$ erhalten wir also das Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} g_{1,1} & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ g_{j-2,1} & \cdots & g_{j-2,j-2} \end{pmatrix}}_{=: G_j} \begin{pmatrix} z_{1,j} \\ \vdots \\ z_{j-2,j} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{wegen } \det(g) = 1 \text{ ist } \det(G_j) \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} z_{1,j} \\ \vdots \\ z_{j-2,j} \end{pmatrix} = 0$$

Damit wurde gezeigt: $z_{i,j} = 0 \forall j > i+1$ also wegen $\pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}$: $x_{i,j} = x_{j,i} = 0 \forall j > i+1$

- Für $i \in \{1, \dots, n-1\}$ berechnen wir:

$$\sum_{k=1}^n \bar{\ell}_{i,k}^2 g_{k,i+1} = \sum_{k=1}^n \underbrace{g_{i,k}}_{=0 \text{ für } k>i} \underbrace{z_{k,i+1}}_{=0 \text{ für } i+1>k+1} = g_{i,i} z_{i,i+1}$$

$$\text{Damit: } g_{i,i} z_{i,i+1} = \sum_{k=1}^n \bar{\ell}_{i,k}^2 \underbrace{g_{k,i+1}}_{=0 \text{ für } k<i+1} = \sum_{k=i+1}^n \underbrace{\bar{\ell}_{i,k}^2}_{=0 \text{ für } k \neq i+1} g_{k,i+1} = \bar{\ell}_{i,i+1}^2 g_{i+1,i+1} = b_i g_{i+1,i+1}$$

$$\text{Also: } z_{i,i+1} = b_i \frac{g_{i+1,i+1}}{g_{i,i}}$$

Damit wurde gezeigt: $x_{i,i+1} = x_{i+1,i} = b_i \frac{g_{i+1,i+1}}{g_{i,i}} > 0$ für $i \in \{1, \dots, n-1\}$ (" > 0 " wegen $b_j, g_{j,j} > 0$ nach Voraussetzung)

- Für $i \in \{2, \dots, n-1\}$ berechnen wir:

$$\sum_{k=1}^n \bar{\ell}_{i,k}^2 g_{k,i} = \sum_{k=1}^n \underbrace{g_{i,k}}_{=0 \text{ für } k>i} \underbrace{z_{k,i}}_{=0 \text{ für } i>k+1} = g_{i,i-1} z_{i-1,i} + g_{i,i} z_{i,i} = g_{i,i-1} b_{i-1} \frac{g_{i,i}}{g_{i-1,i-1}} + g_{i,i} z_{i,i}$$

$$\text{Damit: } g_{i,i} z_{i,i} + b_{i-1} \frac{g_{i,i-1} g_{i,i}}{g_{i-1,i-1}} = \sum_{k=1}^n \bar{\ell}_{i,k}^2 \underbrace{g_{k,i}}_{=0 \text{ für } i>k} = \sum_{k=i}^n \underbrace{\bar{\ell}_{i,k}^2}_{=0 \text{ für } k \neq i+1} g_{k,i} = \bar{\ell}_{i,i+1}^2 g_{i+1,i} = b_i g_{i+1,i}$$

$$\text{Also: } z_{i,i} = b_i \frac{g_{i+1,i}}{g_{i,i}} - b_{i-1} \frac{g_{i,i-1}}{g_{i-1,i-1}}$$

Damit wurde gezeigt: $x_{i,i} = a_i + b_i \frac{g_{i+1,i}}{g_{i,i}} - b_{i-1} \frac{g_{i,i-1}}{g_{i-1,i-1}}$ für $i \in \{2, \dots, n-1\}$

- Zu $x_{1,1}$: $\sum_{k=1}^n \bar{\ell}_{1,k}^2 g_{k,1} = \sum_{k=1}^n \underbrace{g_{1,k}}_{=0 \text{ für } k>1} z_{k,1} = g_{1,1} z_{1,1}$ Damit: $g_{1,1} z_{1,1} = \sum_{k=1}^n \underbrace{\bar{\ell}_{1,k}^2}_{=0 \text{ für } k \neq 2} g_{k,1} = \bar{\ell}_{1,2}^2 g_{2,1} = b_1 g_{2,1}$

Also: $z_{1,1} = b_1 \frac{g_{2,1}}{g_{1,1}}$ Damit wurde gezeigt: $x_{1,1} = a_1 + b_1 \frac{g_{2,1}}{g_{1,1}}$

- Zu $x_{n,n}$: $\sum_{k=1}^n \bar{\ell}_{n,k}^2 g_{k,n} = \sum_{k=1}^n \underbrace{g_{n,k}}_{=0 \text{ für } n>k+1} z_{k,n} = g_{n,n-1} z_{n-1,n} + g_{n,n} z_{n,n} = g_{n,n-1} b_{n-1} \frac{g_{n,n}}{g_{n-1,n-1}} + g_{n,n} z_{n,n}$

Damit: $g_{n,n} z_{n,n} + b_{n-1} \frac{g_{n,n-1} g_{n,n}}{g_{n-1,n-1}} = \sum_{k=1}^n \bar{\ell}_{n,k}^2 \underbrace{g_{k,n}}_{=0 \text{ für } k \neq n-1} = \bar{\ell}_{n,n-1}^2 g_{n-1,n} = b_{n-1} \underbrace{g_{n-1,n}}_{=0 \text{ da } n>n-1} = 0$ Also: $z_{n,n} = -b_{n-1} \frac{g_{n,n-1}}{g_{n-1,n-1}}$

Damit wurde gezeigt: $x_{n,n} = a_n - b_{n-1} \frac{g_{n,n-1}}{g_{n-1,n-1}}$ □

Satz 6.2.2 (Der Raum $\mathcal{O}^{\dot{p}}$):

$$\mathcal{O}^{\dot{p}} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & 0 \\ b_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{o}_n \mathbb{R}^{\perp} \mid b_k > 0 \ \forall k \right\}$$

Beweis:

Obige Menge sei für diesen Beweis mit M bezeichnet.

" \subset ": Sei $\ell \in \mathcal{O}_{\mathcal{O}^{\dot{p}}}^{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^{\#}} \Rightarrow \ell = \dot{p} \times g$ für ein $g \in \mathfrak{L}_n \mathbb{R}$. Damit: $\iota_{\mathcal{O}^{\dot{p}}}^{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^{\#}}(\ell) = \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^{\perp}}(g^{-1} P g) =: (l_{i,j})_{i,j=1}^n$ Nach Lemma 6.2.1 besitzt $(l_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathfrak{o}_n \mathbb{R}^{\perp}$ Tridiagonalgestalt. Außerdem gilt: $l_{i,i+1} = \frac{g_{i+1,i+1}}{g_{i,i}} > 0$. Damit ist $\iota_{\mathcal{O}^{\dot{p}}}^{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^{\#}}(\ell) \in M$. Wegen der Bijektivität von $\iota_{\mathcal{O}^{\dot{p}}}^{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^{\#}}(\ell)$ folgt nun " \supset ".

“ \supset ”: Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & 0 \\ b_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp$$

mit $b_k > 0 \forall k$ vorgegeben. Wir geben direkt ein passendes $g \in L_n \mathbb{R}$ an, so dass $\iota_{\mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}}(\dot{p} \times g) = A$ also $A \in \mathcal{O}^p$ folgt. $g \in L_n \mathbb{R}$ sei definiert durch:

$$g_{i,i} := \frac{\prod_{j=1}^{i-1} b_j}{\left(\prod_{k=1}^n \prod_{j=1}^{k-1} b_j\right)^{\frac{1}{n}}} \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad g_{i+1,i} := \sum_{k=1}^i \left(a_k g_{k,k} \prod_{j=k}^{i-1} b_j \right) \quad i \in \{1, \dots, n-1\} \quad g_{i,j} := 0 \text{ sonst}$$

(Wohldefiniert wegen $b_k > 0$) Damit ist g eine untere Dreiecksmatrix mit $g_{i,i} > 0$ und

$$\det(g) = \prod_{i=1}^n g_{i,i} = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\prod_{j=1}^{i-1} b_j}{\left(\prod_{k=1}^n \prod_{j=1}^{k-1} b_j\right)^{\frac{1}{n}}} \right) = \frac{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{i-1} b_j}{\prod_{k=1}^n \prod_{j=1}^{k-1} b_j} = 1$$

Also ist tatsächlich $g \in L_n \mathbb{R}$. Mit Lemma 6.2.1 können wir nun $X = (x_{i,j})_{i,j=1}^n := \iota_{\mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}}(\dot{p} \times g) = \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}(g^{-1} P g)$ ausrechnen:

- $x_{i,j} = x_{j,i} = 0 \quad \forall j > i + 1$
- $x_{i,i+1} = x_{i+1,i} = \frac{g_{i+1,i+1}}{g_{i,i}} = \frac{\prod_{j=1}^i b_j}{\prod_{j=1}^{i-1} b_j} = b_i$ für $i \in \{1, \dots, n-1\}$
- $x_{i,i} = \frac{g_{i+1,i}}{g_{i,i}} - \frac{g_{i,i-1}}{g_{i-1,i-1}} = \frac{\sum_{k=1}^i \left(a_k g_{k,k} \prod_{j=k}^{i-1} b_j \right)}{g_{i,i}} - \frac{\sum_{k=1}^{i-1} \left(a_k g_{k,k} \prod_{j=k}^{i-2} b_j \right)}{g_{i-1,i-1}} = \sum_{k=1}^i \left(a_k \frac{\prod_{j=k}^{i-1} b_j}{g_{i,i}} \right) - \sum_{k=1}^{i-1} \left(a_k \frac{\prod_{j=k}^{i-2} b_j}{g_{i-1,i-1}} \right) = \sum_{k=1}^i \left(a_k \frac{\prod_{j=1}^{k-1} b_j \prod_{j=k}^{i-1} b_j}{\prod_{j=1}^{i-1} b_j} \right) - \sum_{k=1}^{i-1} \left(a_k \frac{\prod_{j=1}^{k-1} b_j \prod_{j=k}^{i-2} b_j}{\prod_{j=1}^{i-2} b_j} \right) = \sum_{k=1}^i a_k - \sum_{k=1}^{i-1} a_k = a_i$ für $i \in \{2, \dots, n-1\}$
- $x_{1,1} = \frac{g_{2,1}}{g_{1,1}} = \frac{a_1 g_{1,1}}{g_{1,1}} = a_1$
- $x_{n,n} = -\frac{g_{n,n-1}}{g_{n-1,n-1}} = -\frac{\sum_{k=1}^{n-1} \left(a_k g_{k,k} \prod_{j=k}^{n-2} b_j \right)}{g_{n-1,n-1}} = -\sum_{k=1}^{n-1} \left(a_k \frac{g_{k,k}}{g_{n-1,n-1}} \prod_{j=k}^{n-2} b_j \right) = -\sum_{k=1}^{n-1} \left(a_k \frac{\prod_{j=1}^{k-1} b_j \prod_{j=k}^{n-2} b_j}{\prod_{j=1}^{n-2} b_j} \right) = -\sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_n$ wegen $\text{tr}(A) = 0$ also $\sum_{k=1}^n a_k = 0$

$\Rightarrow X = A \Rightarrow A \in \mathcal{O}^p$ □

Bemerkung 6.2.3:

Man kann zeigen, dass der Orbit $\mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}$ unter allen Orbits der coadjungierten Darstellung auf $\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#$ als Mannigfaltigkeit die kleinste Dimension besitzt. Wir werden später noch sehen, dass $\dim(\mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}) = 2n - 2$ gilt.

6.3 Die Tangentialräume $T_\ell \mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}$

Es sei im ganzen Abschnitt stets $\ell \in \mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}$ und $\bar{\ell} := \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^{\perp} \left(\iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}(\ell) \right) \in \mathcal{O}^{\dot{p}} \subset \mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp$ die zugehörige Matrix, gegeben durch:

$$\bar{\ell} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & 0 \\ b_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

Wir wollen den Tangentialraum $T_\ell \mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}$ untersuchen. In Bemerkung 6.1.3 wurde gezeigt, dass $\mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} \subset \mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#$ eine Untermannigfaltigkeit ist. Damit gilt:

$$T_\ell \mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} \subset T_\ell \mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#$$

Wir haben außerdem die (isomorphen) Identifikationen (vgl. Lemma 3.1)

$$T_\ell \mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\# \doteq \mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\# \doteq \mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp \doteq \mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp \subset \mathfrak{sl}_n \mathbb{R}$$

Daher definieren wir

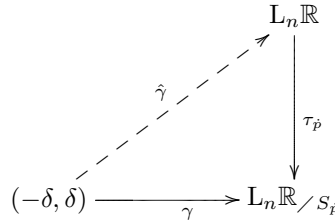
$$\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}} := \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^{\perp} \left(\iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} \left(\iota_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}^{T_\ell \mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} \left(T_\ell \mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} \right) \right) \right) \subset \mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp$$

Da $T_\ell \mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}$ ein Untervektorraum von $T_\ell \mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#$ und obige Abbildung ein Isomorphismus ist, ist $\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}$ ein Untervektorraum von $\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp$ und die Einschränkung dieser Abbildung ein Isomorphismus zwischen diesen Räumen.

Abkürzend bezeichnen wir sie mit $\iota_{\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}}^{T_\ell \mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}}$

Lemma 6.3.1:

Sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{L}_n \mathbb{R} / S_p$ eine Kurve und $g \in \mathbb{L}_n \mathbb{R}$ mit $\tau_p(g) = \gamma(0)$ gegeben. Dann lässt sich γ lokal um 0 zu einer Kurve durch g liften, d.h. $\exists \hat{\gamma} : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{L}_n \mathbb{R}$ Kurve mit $\tau_p \circ \hat{\gamma} = \gamma|_{(-\delta, \delta)}$ und $\hat{\gamma}(0) = g$.



Beweis:

Satz 6.1.1 $\Rightarrow \exists$ Umgebung $\gamma(0) \in U \subset \mathbb{L}_n \mathbb{R} / S_p$ oBdA. offen und $\exists \varphi : U \rightarrow \mathbb{L}_n \mathbb{R}$ glatt mit $\tau_p \circ \varphi = \text{id}_U$. oBdA. gelte $\varphi(\gamma(0)) = g$ denn:

$$\varphi(\gamma(0)) =: \hat{g} \Rightarrow \tau_p(\hat{g}) = \tau_p(\varphi(\gamma(0))) = \gamma(0) = \tau_p(g) \Rightarrow [\hat{g}] = [g] \text{ in } \mathbb{L}_n \mathbb{R} / S_p \Rightarrow \hat{g}^{-1} g \in S_p$$

Wir setzen

$$\hat{\varphi} : U \longrightarrow \mathbb{L}_n \mathbb{R} \\ x \longmapsto \varphi(x) \hat{g}^{-1} g \quad \Rightarrow \hat{\varphi} \text{ ist glatt da } \cdot \text{ in } \mathbb{L}_n \mathbb{R} \text{ glatt ist (Lie-Gruppe)}$$

und erhalten:

$$(\tau_p \circ \hat{\varphi})(x) = \tau_p(\varphi(x) \hat{g}^{-1} g) = \tau_p(\varphi(x)) = x \quad \forall x \in U \text{ d.h. } \tau_p \circ \hat{\varphi} = \text{id}_U$$

$$\hat{\varphi}(\gamma(0)) = \varphi(\gamma(0)) \hat{g}^{-1} g = \hat{g} \hat{g}^{-1} g = g \rightsquigarrow \text{Wir können also zu } \hat{\varphi} \text{ übergehen}$$

Damit:

$\gamma^{-1}(U) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$ ist offen. Wählen $I \subset \gamma^{-1}(U)$ Zusammenhangskomponente mit $0 \in I$

$\Rightarrow I$ ist ein Intervall also oBdA. $I = (-\delta, \delta)$. Wir definieren

$$\hat{\gamma} : \begin{array}{ccc} (-\delta, \delta) & \longrightarrow & L_n \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \varphi(\gamma(t)) \end{array} \quad \Rightarrow \hat{\gamma} \text{ ist Kurve in } L_n \mathbb{R}$$

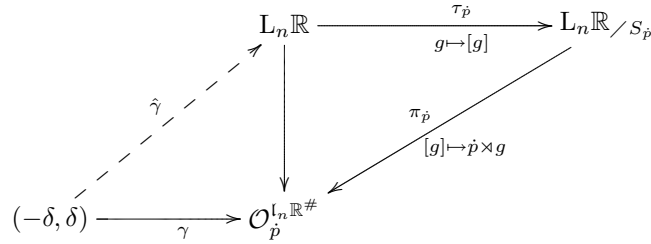
und erhalten:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(0) &= \varphi(\gamma(0)) = g \\ (\tau_{\dot{p}} \circ \hat{\gamma})(t) &= \tau_{\dot{p}}(\varphi(\gamma(t))) = \gamma(t) \quad \forall t \in (-\delta, \delta) \text{ d.h. } \tau_{\dot{p}} \circ \hat{\gamma} = \gamma|_{(-\delta, \delta)} \end{aligned}$$

□

Korollar 6.3.2: (Schwachtes Liftungslemma)

Sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{O}_{\dot{p}}^{L_n \mathbb{R}^\#}$ eine Kurve und $g \in L_n \mathbb{R}$ mit $\gamma(0) = \dot{p} \times g$ gegeben. Dann lässt sich γ lokal um 0 zu einer Kurve durch g liften, d.h. $\exists \hat{\gamma} : (-\delta, \delta) \rightarrow L_n \mathbb{R}$ Kurve mit $\dot{p} \times \hat{\gamma} = \gamma|_{(-\delta, \delta)}$ und $\hat{\gamma}(0) = g$.



Beweis:

$\pi_{\dot{p}}$ ist nach Bemerkung 6.1.3 ein Diffeomorphismus $\Rightarrow \exists (\pi_{\dot{p}})^{-1}$ glatt. Damit definiert

$$\tilde{\gamma} : \begin{array}{ccc} (-\varepsilon, \varepsilon) & \longrightarrow & L_n \mathbb{R} / S_{\dot{p}} \\ t & \longmapsto & ((\pi_{\dot{p}})^{-1} \circ \gamma)(t) \end{array}$$

eine Kurve in $L_n \mathbb{R} / S_{\dot{p}}$ durch $(\pi_{\dot{p}})^{-1}(\gamma(0))$. Es ist

$$\pi_{\dot{p}} \circ \tau_{\dot{p}}(g) = \dot{p} \times g = \gamma(0) \Rightarrow \tau_{\dot{p}}(g) = (\pi_{\dot{p}})^{-1}(\gamma(0)) = \tilde{\gamma}(0)$$

$$\stackrel{\text{Lemma 6.3.1}}{\implies} \exists \text{ Liftung } \hat{\gamma} : (-\delta, \delta) \rightarrow L_n \mathbb{R} \text{ mit } \tau_{\dot{p}} \circ \hat{\gamma} = \tilde{\gamma}|_{(-\delta, \delta)} \text{ und } \hat{\gamma}(0) = g$$

Damit:

$$(\dot{p} \times \hat{\gamma})(t) = (\pi_{\dot{p}} \circ \tau_{\dot{p}} \circ \hat{\gamma})(t) = (\pi_{\dot{p}} \circ \tilde{\gamma})(t) = \left(\pi_{\dot{p}} \circ (\pi_{\dot{p}})^{-1} \circ \gamma \right)(t) = \gamma(t) \quad \forall t \in (-\delta, \delta)$$

Also: $\dot{p} \times \hat{\gamma} = \gamma|_{(-\delta, \delta)}$ und $\hat{\gamma}(0) = g$. □

Bemerkung:

Die Liftung deren Existenz Korollar 6.3.2 sichert ist nicht eindeutig d.h. auch für ein festes $g \in L_n \mathbb{R}$ existieren viele Liftungen. Dennoch können wir die Aussage benutzen, um zu einem beliebigen Tangentialvektor aus $T_{\ell} \mathcal{O}_{\dot{p}}^{L_n \mathbb{R}^\#}$ einen für uns geeigneten Repräsentanten zu konstruieren und es wird sich herausstellen dass die schwache Aussage aus dem Korollar völlig ausreichend ist.

Satz 6.3.3:

Sei $[\mu] \in T_{\ell} \mathcal{O}_{\dot{p}}^{L_n \mathbb{R}^\#}$ und $g \in L_n \mathbb{R}$ mit $\dot{p} \times g = \ell$. Ist dann g_t eine Liftung von μ durch g gemäß Korollar 6.3.2 so gilt:

- i. $[\mu] = [\dot{p} \times g_t] = [\ell \times g^{-1} g_t]$
- ii. $(g^{-1} g_t)'(0)|_1 \in L_n \mathbb{R}$
- iii. $\mathcal{O}_{\ell}^{\dot{p}} \ni \iota_{\mathcal{O}_{\ell}^{\dot{p}}}^{T_{\ell} \mathcal{O}_{\dot{p}}^{L_n \mathbb{R}^\#}}([\mu]) = \pi_{\sigma_n \mathbb{R}^\perp} \left(\frac{d}{dt} \left((g^{-1} g_t)^{-1} \bar{\ell} (g^{-1} g_t) \right) (0) |_1 \right) = \pi_{\sigma_n \mathbb{R}^\perp} \left(\left[\bar{\ell}, (g^{-1} g_t)'(0)|_1 \right] \right)$

Beweis:

Zu (i):

$$\dot{p} \times g = \ell \Rightarrow \ell \times g^{-1} = \dot{p} \Rightarrow \dot{p} \times g_t = (\ell \times g^{-1}) \times g_t = \ell \times g^{-1} g_t$$

Nach Voraussetzung gilt: $\ell \times g^{-1} g_t = \dot{p} \times g_t = \mu|_{(-\delta, \delta)}$ Also: $[\mu] = [\dot{p} \times g_t] = [\ell \times g^{-1} g_t]$

Zu (ii):

 $g^{-1} g_t$ ist eine Kurve in $L_n \mathbb{R}$ mit $g^{-1} g_0 = g^{-1} g = e$.Satz 4.10 $\Rightarrow (g^{-1} g_t)'(0)|_1 \in \mathfrak{L}_n \mathbb{R}$

Zu (iii):

$$\begin{aligned} \iota_{\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}}^{T_\ell \mathcal{O}_\ell^{\mathfrak{L}_n \mathbb{R}^\#}}([\mu]) &= \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}} \left(\iota_{\mathfrak{L}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{L}_n \mathbb{R}^\#} \left(\iota_{\mathfrak{L}_n \mathbb{R}^\#}^{T_\ell \mathfrak{L}_n \mathbb{R}^\#}([\mu]) \right) \right) = \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}} \left(\iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}}^{\mathfrak{L}_n \mathbb{R}^\#} \left(\iota_{\mathfrak{L}_n \mathbb{R}^\#}^{T_\ell \mathfrak{L}_n \mathbb{R}^\#}([\ell \times g^{-1} g_t]) \right) \right) \\ &= \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}} \left(\iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}}^{\mathfrak{L}_n \mathbb{R}^\#} \left(\frac{d}{dt} (\ell \times g^{-1} g_t)'(0)|_1 \right) \right) \stackrel{\text{Satz 4.11}}{=} \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}} \left(\iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}}^{\mathfrak{L}_n \mathbb{R}^\#} \left(\ell \times \left((g^{-1} g_t)'(0)|_1 \right) \right) \right) \\ &\stackrel{\text{Satz 4.6}}{=} \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}} \left(\iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}}^{\mathfrak{L}_n \mathbb{R}^\#} \left(\iota_{\mathfrak{L}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp} \left(\pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp} \left([\bar{\ell}, (g^{-1} g_t)'(0)|_1] \right) \right) \right) \right) \\ &= \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}} \left(\iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}}^{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp} \left(\pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp} \left([\bar{\ell}, (g^{-1} g_t)'(0)|_1] \right) \right) \right) \\ &= \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp} \left([\bar{\ell}, (g^{-1} g_t)'(0)|_1] \right) \end{aligned}$$

Außerdem berechnet man:

 $\frac{d}{dt} \left((g^{-1} g_t)^{-1} \bar{\ell} (g^{-1} g_t) \right) (0)|_1 = \bar{\ell} (g^{-1} g_t)'(0)|_1 - (g^{-1} g_t)'(0)|_1 \bar{\ell} = [\bar{\ell}, (g^{-1} g_t)'(0)|_1]$ was wir im Detail bereits im Beweis zu Satz 4.8 nachgerechnet hatten.
Also insgesamt: $\iota_{\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}}^{T_\ell \mathcal{O}_\ell^{\mathfrak{L}_n \mathbb{R}^\#}}([\mu]) = \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp} \left([\bar{\ell}, (g^{-1} g_t)'(0)|_1] \right) = \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp} \left(\frac{d}{dt} \left((g^{-1} g_t)^{-1} \bar{\ell} (g^{-1} g_t) \right) (0)|_1 \right)$ \square

Mit diesen Hilfsmitteln sind wir nun in der Lage ein erstes wichtiges Resultat zu beweisen:

Satz 6.3.4:

Es gilt:

$$\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}} = \left\{ \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}([\bar{\ell}, g]) \mid g \in \mathfrak{L}_n \mathbb{R} \right\} \subset \mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp$$

Beweis:“ \subset ”: Nach Satz 6.3.3 ist zu $[\mu] \in T_\ell \mathcal{O}_\ell^{\mathfrak{L}_n \mathbb{R}^\#}$:

$$\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}} \ni \iota_{\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}}^{T_\ell \mathcal{O}_\ell^{\mathfrak{L}_n \mathbb{R}^\#}}([\mu]) = \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}([\bar{\ell}, g])$$

für ein gewisses $g \in \mathfrak{L}_n \mathbb{R}$. Damit folgt “ \subset ” aus der Bijektivität von $\iota_{\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}}^{T_\ell \mathcal{O}_\ell^{\mathfrak{L}_n \mathbb{R}^\#}}$.“ \supset ”: Sei $\gamma \in \mathfrak{L}_n \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben. Sei $g \in L_n \mathbb{R}$ mit $\dot{p} \times g = \ell$ gewählt.Satz 4.12 $\Rightarrow \exists$ Kurve $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow L_n \mathbb{R}$ mit $c(0) = g$ und $c'(0)|_1 = g\gamma \implies \dot{p} \times c_0 = \dot{p} \times g = \ell$ $\Rightarrow [\dot{p} \times c_t] \in T_\ell \mathcal{O}_\ell^{\mathfrak{L}_n \mathbb{R}^\#}$ Mit Satz 6.3.3 folgt: $[\dot{p} \times c_t] = [\ell \times g^{-1} c_t]$ und:

$$\iota_{\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}}^{T_\ell \mathcal{O}_\ell^{\mathfrak{L}_n \mathbb{R}^\#}}([\dot{p} \times c_t]) = \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp} \left([\bar{\ell}, (g^{-1} c_t)'(0)|_1] \right) = \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp} \left([\bar{\ell}, g^{-1} c'(0)|_1] \right) = \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp} \left([\bar{\ell}, g^{-1} g\gamma] \right) = \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}([\bar{\ell}, \gamma])$$

Also: $\pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}([\bar{\ell}, \gamma]) \in \mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}$ \square **Bemerkung 6.3.5:**Wir wollen uns kurz überlegen wie sich die fehlende Eindeutigkeit des Liftungslemmas 6.3.2 auswirkt. Wir wählen also zu $[\mu] \in T_\ell \mathcal{O}_\ell^{\mathfrak{L}_n \mathbb{R}^\#}$ $g, h \in L_n \mathbb{R}$ mit $\dot{p} \times g = \ell$ und $\dot{p} \times h = \ell$. Weiter sei g_t eine beliebige Liftung von μ durch g und h_t eine durch h .

$$\Rightarrow [\mu] = \underbrace{[\dot{p} \times g_t]}_{=[\ell \times g^{-1} g_t]} = \underbrace{[\dot{p} \times h_t]}_{=[\ell \times h^{-1} h_t]} \text{ und } \dot{p} \times g_t = \dot{p} \times h_t \Rightarrow \dot{p} \times g_t h_t^{-1} = \dot{p} \text{ d.h. } g_t h_t^{-1} \in S_{\dot{p}} \quad \forall t$$

$\Rightarrow s_t := g_t h_t^{-1}$ ist eine Kurve im Stabilisator $S_{\dot{p}}$ und $g_t = s_t h_t$. Nach Satz 6.3.3 gilt:

$$\pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp} \left(\left[\bar{\ell}, (g^{-1} g_t)'(0) \Big|_1 \right] \right) = \iota_{\mathcal{O}_{\dot{\ell}}^{\dot{p}}}^{T_\ell \mathcal{O}_{\dot{p}}^{\mathbb{R}^\#}} \left([\ell \times g^{-1} g_t] \right) = \iota_{\mathcal{O}_{\dot{\ell}}^{\dot{p}}}^{T_\ell \mathcal{O}_{\dot{p}}^{\mathbb{R}^\#}} \left([\ell \times h^{-1} h_t] \right) = \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp} \left(\left[\bar{\ell}, (h^{-1} h_t)'(0) \Big|_1 \right] \right) \quad (\star)$$

Auf der Ebene von $\mathfrak{l}_n \mathbb{R}$ berechnet man:

$$\begin{aligned} (g^{-1} g_t)'(0) \Big|_1 &= g^{-1} g_t'(0) \Big|_1 = g^{-1} (s_t h_t)'(0) \Big|_1 = g^{-1} s_t'(0) \Big|_1 h_0 + g^{-1} \underbrace{s_0}_{=g_0 h_0^{-1}} h_t'(0) \Big|_1 \\ &= g^{-1} s_t'(0) \Big|_1 h + g^{-1} g h^{-1} h_t'(0) \Big|_1 = g^{-1} s_t'(0) \Big|_1 h + h^{-1} h_t'(0) \Big|_1 \\ &= (g^{-1} s_t h)'(0) \Big|_1 + (h^{-1} h_t)'(0) \Big|_1 \end{aligned}$$

Also folgt mit (\star) :

$$\begin{aligned} \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp} \left(\left[\bar{\ell}, (h^{-1} h_t)'(0) \Big|_1 \right] \right) &\stackrel{(\star)}{=} \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp} \left(\left[\bar{\ell}, (g^{-1} g_t)'(0) \Big|_1 \right] \right) = \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp} \left(\left[\bar{\ell}, (g^{-1} s_t h)'(0) \Big|_1 + (h^{-1} h_t)'(0) \Big|_1 \right] \right) \\ &= \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp} \left(\left[\bar{\ell}, (g^{-1} s_t h)'(0) \Big|_1 \right] + \left[\bar{\ell}, (h^{-1} h_t)'(0) \Big|_1 \right] \right) \\ &= \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp} \left(\left[\bar{\ell}, (h^{-1} h_t)'(0) \Big|_1 \right] \right) + \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp} \left(\left[\bar{\ell}, (g^{-1} s_t h)'(0) \Big|_1 \right] \right) \end{aligned}$$

Damit muss also gelten: $\pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp} \left(\left[\bar{\ell}, (g^{-1} s_t h)'(0) \Big|_1 \right] \right) = 0$

Dies können wir jedoch auch anders einsehen: $\ell \times g^{-1} s_t h$ ist offenbar eine Kurve durch ℓ , also $[\ell \times g^{-1} s_t h] \in T_\ell \mathcal{O}_{\dot{p}}^{\mathbb{R}^\#}$ und es ist $\iota_{\mathcal{O}_{\dot{\ell}}^{\dot{p}}}^{T_\ell \mathcal{O}_{\dot{p}}^{\mathbb{R}^\#}} \left([\ell \times g^{-1} s_t h] \right) = \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp} \left(\left[\bar{\ell}, (g^{-1} s_t h)'(0) \Big|_1 \right] \right)$. Man berechnet aber:

$$\ell \times g^{-1} s_t h = \underbrace{(\ell \times g^{-1})}_{=\dot{p}} \times s_t h = \underbrace{(\dot{p} \times s_t)}_{=\dot{p} \text{ da } s_t \in S_{\dot{p}} \forall t} \times h = \dot{p} \times h = \ell \quad \Rightarrow \quad [\ell \times g^{-1} s_t h] = [t \mapsto \ell]$$

d.h. es handelt sich gerade um eine speziell Liftung der Punktcurve in ℓ also von $0 \in T_\ell \mathcal{O}_{\dot{p}}^{\mathbb{R}^\#}$.

Als Ergebnis unterscheiden sich verschiedene Liftungen in $\mathfrak{l}_n \mathbb{R}$ also nur durch eine Kurve im Stabilisator und im Tangentialraum spiegelt sich dies gerade durch die Punktcurve, also den Nullvektor wieder.

Wir untersuchen nun noch die Beziehung zwischen $\mathfrak{l}_n \mathbb{R}$ und $\mathcal{O}_{\dot{\ell}}^{\dot{p}}$.

Definition 6.3.6:

Es sei

$$\begin{aligned} D_{\dot{\ell}}^{\dot{p}} : \mathfrak{l}_n \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{O}_{\dot{\ell}}^{\dot{p}} \\ g &\longmapsto \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp} \left([\bar{\ell}, g] \right) \end{aligned}$$

Satz 6.3.7:

Sei $g \in \mathfrak{l}_n \mathbb{R}$. Dann gilt für die Matrix $D_{\dot{\ell}}^{\dot{p}}(g) = \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp} \left([\bar{\ell}, g] \right) =: (d_{i,j})_{i,j=1}^n$ folgendes:

- $d_{i,j} = d_{j,i} = 0 \quad \forall j > i + 1$
- $d_{i,i+1} = d_{i+1,i} = b_i g_{i+1,i+1} - b_i g_{i,i}$ für $i \in \{1, \dots, n-1\}$
- $d_{i,i} = b_i g_{i+1,i} - b_{i-1} g_{i,i-1}$ für $i \in \{2, \dots, n-1\}$
- $d_{1,1} = b_1 g_{2,1}$
- $d_{n,n} = -b_{n-1} g_{n,n-1}$

wobei $g = \begin{pmatrix} g_{1,1} & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ g_{n,1} & \cdots & \cdots & g_{n,n} \end{pmatrix}$

z.B. im Fall $n=4$:

$$\begin{pmatrix} b_1 g_{2,1} & b_1 g_{2,2} - b_1 g_{1,1} & 0 & 0 \\ b_1 g_{2,2} - b_1 g_{1,1} & b_2 g_{3,2} - b_1 g_{2,1} & b_2 g_{3,3} - b_2 g_{2,2} & 0 \\ 0 & b_2 g_{3,3} - b_2 g_{2,2} & b_3 g_{4,3} - b_2 g_{3,2} & b_3 g_{4,4} - b_3 g_{3,3} \\ 0 & 0 & b_3 g_{4,4} - b_3 g_{3,3} & -b_3 g_{4,3} \end{pmatrix}$$

Beweis:

Nach Satz 4.12 finden wir eine Kurve γ_t in $L_n \mathbb{R}$ durch e mit $\gamma'_t(0)|_1 = g$. Also ist $[\bar{\ell} \times \gamma_t] \in T_\ell \mathcal{O}_p^{L_n \mathbb{R}^\#}$ und nach Satz 6.3.3 gilt:

$$D_\ell^{\dot{p}}(g) = \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}([\bar{\ell}, g]) = \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}([\bar{\ell}, \gamma'_t(0)|_1]) \stackrel{\text{Satz 6.3.3}}{=} \frac{d}{dt} (\pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}(\gamma_t^{-1} \bar{\ell} \gamma_t))(0)|_1$$

Die Matrix $\pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}(\gamma_t^{-1} \bar{\ell} \gamma_t)$ kennen wir jedoch nach Lemma 6.2.1. Sei

$$\gamma_t = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1}(t) & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \gamma_{n,1}(t) & \cdots & \gamma_{n,n}(t) \end{pmatrix}$$

Wir dürfen γ_t komponentenweise ableiten und daher gilt nach Konstruktion

$$g = \gamma'_t(0)|_1 = \begin{pmatrix} \gamma'_{1,1}(0) & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \gamma'_{n,1}(0) & \cdots & \gamma'_{n,n}(0) \end{pmatrix}$$

Mit Lemma 6.2.1 punktweise angewandt erhalten wir für $X_t = (x_{i,j}(t))_{i,j=1}^n =: \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}(\gamma_t^{-1} \bar{\ell} \gamma_t)$:

- i. $x_{i,j}(t) = x_{j,i}(t) \equiv 0 \quad \forall j > i + 1$
- ii. $x_{i,i+1}(t) = x_{i+1,i}(t) = b_i \frac{\gamma_{i+1,i+1}(t)}{\gamma_{i,i}(t)} \quad \text{für } i \in \{1, \dots, n-1\}$
- iii. $x_{i,i}(t) = a_i + b_i \frac{\gamma_{i+1,i}(t)}{\gamma_{i,i}(t)} - b_{i-1} \frac{\gamma_{i,i-1}(t)}{\gamma_{i-1,i-1}(t)} \quad \text{für } i \in \{2, \dots, n-1\}$
 $x_{1,1}(t) = a_1 + b_1 \frac{\gamma_{2,1}(t)}{\gamma_{1,1}(t)}$
 $x_{n,n}(t) = a_n - b_{n-1} \frac{\gamma_{n,n-1}(t)}{\gamma_{n-1,n-1}(t)}$

Wegen $D_\ell^{\dot{p}}(g) = X'_t(0)|_1$ erhalten wir durch differenzieren dieser Eigenschaften in 0 unsere Aussage:

- (i) $\Rightarrow d_{i,j} = d_{j,i} = 0 \quad \forall j > i + 1$
- (ii) $\Rightarrow d_{i,i+1} = d_{i+1,i} = \left(b_i \frac{\gamma_{i+1,i+1}(t)}{\gamma_{i,i}(t)} \right)'(0) = b_i \frac{\gamma'_{i+1,i+1}(0) \gamma_{i,i}(0) - \gamma_{i+1,i+1}(0) \gamma'_{i,i}(0)}{(\gamma_{i,i}(0))^2} = b_i \gamma'_{i+1,i+1}(0) - b_i \gamma'_{i,i}(0) = b_i g_{i+1,i+1} - b_i g_{i,i} \quad \text{für } i \in \{1, \dots, n-1\}$
- (iii) $\Rightarrow d_{i,i} = \left(a_i + b_i \frac{\gamma_{i+1,i}(t)}{\gamma_{i,i}(t)} - b_{i-1} \frac{\gamma_{i,i-1}(t)}{\gamma_{i-1,i-1}(t)} \right)'(0) = \left(b_i \frac{\gamma'_{i+1,i}(0) \gamma_{i,i}(0) - \gamma_{i+1,i}(0) \gamma'_{i,i}(0)}{(\gamma_{i,i}(0))^2} - b_{i-1} \frac{\gamma'_{i,i-1}(0) \gamma_{i-1,i-1}(0) - \gamma_{i,i-1}(0) \gamma'_{i-1,i-1}(0)}{(\gamma_{i-1,i-1}(0))^2} \right)$
 $= b_i \gamma'_{i+1,i}(0) - b_{i-1} \gamma'_{i,i-1}(0) = b_i g_{i+1,i} - b_{i-1} g_{i,i-1} \quad \text{für } i \in \{2, \dots, n-1\}$
 $d_{1,1} = \left(a_1 + b_1 \frac{\gamma_{2,1}(t)}{\gamma_{1,1}(t)} \right)'(0) = b_1 \frac{\gamma'_{2,1}(0) \gamma_{1,1}(0) - \gamma_{2,1}(0) \gamma'_{1,1}(0)}{(\gamma_{1,1}(0))^2} = b_1 \gamma'_{2,1}(0) = b_1 g_{2,1}$
 $d_{n,n} = \left(a_n - b_{n-1} \frac{\gamma_{n,n-1}(t)}{\gamma_{n-1,n-1}(t)} \right)'(0) = -b_{n-1} \frac{\gamma'_{n,n-1}(0) \gamma_{n-1,n-1}(0) - \gamma_{n,n-1}(0) \gamma'_{n-1,n-1}(0)}{(\gamma_{n-1,n-1}(0))^2} = -b_{n-1} \gamma'_{n,n-1}(0) = -b_{n-1} g_{n,n-1}$

(Die Konstanten in dieser Rechnung erhält man wegen $\gamma(0) = e$. □

Bemerkung 6.3.8: Nach diesem Satz ist die Abbildung $D_\ell^{\dot{p}}$ vollständig durch Haupt- und untere Nebendiagonale der Elemente aus $\mathfrak{L}_n \mathbb{R}$ bestimmt ($g_{n,n}$ taucht implizit wegen $\text{tr}(g) = 0$ auf). Damit ist klar, dass es (für $n > 2$) keine eindeutige Umkehrabbildung geben kann. Aus Satz 6.3.4 wissen wir aber, dass $D_\ell^{\dot{p}}$ surjektiv ist. Wir können also eine injektive Abbildung

$$I_\ell^{\dot{p}} : \mathcal{O}_\ell^{\dot{p}} \longrightarrow \mathfrak{L}_n \mathbb{R}$$

finden, so dass zumindest $D_\ell^{\dot{p}} \circ I_\ell^{\dot{p}} = \text{id}_{\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}}$ gilt. Wir werden eine solche Abbildung benötigen und versuchen eine in einem gewissen Sinn möglichst einfache anzugeben.

Satz 6.3.9:

Die Abbildung $I_\ell^{\dot{p}} : \mathcal{O}_\ell^{\dot{p}} \longrightarrow \mathfrak{L}_n \mathbb{R}$ sei definiert durch: $I_\ell^{\dot{p}} \left((\beta_{i,j})_{i,j=1}^n \right) =: (\alpha_{i,j})_{i,j=1}^n$ wobei

$$\begin{aligned} \alpha_{i,i} &:= \sum_{k=1}^{i-1} \left(\frac{k}{n} \frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} \right) - \sum_{k=i}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n} \frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} \right) && \text{für } i \in \{1, \dots, n\} \\ \alpha_{i+1,i} &:= \frac{1}{b_i} \sum_{k=1}^i \beta_{k,k} && \text{für } i \in \{1, \dots, n-1\} \\ \alpha_{i,j} &:= 0 && \text{sonst} \end{aligned}$$

Dann gilt:

- i. $I_\ell^{\dot{p}}$ ist wohldefiniert (also $I_\ell^{\dot{p}}(B) \in \mathfrak{L}_n \mathbb{R} \quad \forall B \in \mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}$)
- ii. $D_\ell^{\dot{p}} \circ I_\ell^{\dot{p}} = \text{id}_{\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}}$ und damit ist $I_\ell^{\dot{p}}$ auch injektiv

Beweis:

$D_\ell^{\dot{p}}$ ist surjektiv $\Rightarrow \mathcal{O}_\ell^{\dot{p}} \ni (\beta_{i,j})_{i,j=1}^n = D_\ell^{\dot{p}}(g)$ für ein gewisses $g \in \mathfrak{L}_n \mathbb{R}$. $\xRightarrow{\text{Satz 6.3.7}}$

$$(\beta_{i,j})_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & & 0 \\ \beta_{1,2} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta_{n-1,n} \\ 0 & & \beta_{n-1,n} & \beta_{n,n} \end{pmatrix}$$

Zu (i): $(\alpha_{i,j})_{i,j=1}^n$ ist offenbar eine untere Dreiecksmatrix.

$$\begin{aligned} \text{tr} \left((\alpha_{i,j})_{i,j=1}^n \right) &= \sum_{i=1}^n \alpha_{i,i} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{i-1} \left(\frac{k}{n} \frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} \right) - \sum_{k=i}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n} \frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{i-1} \left(\left(1 - \frac{n-k}{n}\right) \frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} \right) - \sum_{k=i}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n} \frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{i-1} \left(\frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} \right) - \sum_{k=1}^{i-1} \left(\frac{n-k}{n} \frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} \right) - \sum_{k=i}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n} \frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{i-1} \left(\frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} \right) - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n} \frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} \right) \right) = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{i-1} \left(\frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} \right) \right) - n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n} \frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} \right) \\ &= \left(\sum_{i=2}^n \sum_{k=1}^{i-1} \left(\frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} \right) \right) - \sum_{k=1}^{n-1} \left((n-k) \frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} \right) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^i \left(\frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} \right) \right) - \sum_{k=1}^{n-1} \left((n-k) \frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k}^{n-1} \left(\frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} \right) \right) - \sum_{k=1}^{n-1} \left((n-k) \frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} \right) = \left(\sum_{k=1}^{n-1} (n-1-k+1) \left(\frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} \right) \right) - \sum_{k=1}^{n-1} \left((n-k) \frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left((n-k) \frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} \right) - \sum_{k=1}^{n-1} \left((n-k) \frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Zu (ii): Es sei $(d_{i,j})_{i,j=1}^n := D_\ell^{\dot{p}} \circ I_\ell^{\dot{p}} \left((\beta_{i,j})_{i,j=1}^n \right)$. Wir können die $d_{i,j}$ direkt mit Satz 6.3.7 ausrechnen:

- $d_{i,j} = d_{j,i} = 0 = \beta_{i,j} = \beta_{j,i} \quad \forall j > i + 1$

- $d_{i,i+1} = d_{i+1,i} = b_i \alpha_{i+1,i+1} - b_i \alpha_{i,i} = b_i (\alpha_{i+1,i+1} - \alpha_{i,i})$
 $= b_i \left(\left(\sum_{k=1}^i \binom{k}{n} \frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} \right) - \sum_{k=i+1}^{n-1} \binom{n-k}{n} \frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} \right) - \left(\sum_{k=1}^{i-1} \binom{k}{n} \frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} - \sum_{k=i}^{n-1} \binom{n-k}{n} \frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} \right)$
 $= b_i \left(\sum_{k=1}^i \binom{k}{n} \frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} - \sum_{k=i+1}^{n-1} \binom{n-k}{n} \frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} - \sum_{k=1}^{i-1} \binom{k}{n} \frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} + \sum_{k=i}^{n-1} \binom{n-k}{n} \frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} \right)$
 $= b_i \left(\frac{i}{n} \frac{\beta_{i,i+1}}{b_i} + \frac{n-i}{n} \frac{\beta_{i,i+1}}{b_i} \right) = \frac{i+n-i}{n} \beta_{i,i+1} = \beta_{i,i+1} \quad \text{für } i \in \{1, \dots, n-1\}$
- $d_{i,i} = b_i \alpha_{i+1,i} - b_{i-1} \alpha_{i,i-1} = b_i \left(\frac{1}{b_i} \sum_{k=1}^i \beta_{k,k} \right) - b_{i-1} \left(\frac{1}{b_{i-1}} \sum_{k=1}^{i-1} \beta_{k,k} \right) = \sum_{k=1}^i \beta_{k,k} - \sum_{k=1}^{i-1} \beta_{k,k} = \beta_{i,i}$
für $i \in \{2, \dots, n-1\}$
 $d_{1,1} = b_1 \alpha_{2,1} = b_1 \frac{1}{b_1} \sum_{k=1}^1 \beta_{k,k} = \beta_{1,1}$
 $d_{n,n} = -b_{n-1} \alpha_{n,n-1} = -b_{n-1} \frac{1}{b_{n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{k,k} = - \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{k,k} = \beta_{n,n}$ da $\text{tr} \left((\beta_{i,j})_{i,j=1}^n \right) = 0$ nach Voraussetzung

Damit wurde gezeigt: $D_\ell^{\dot{p}} \circ I_\ell^{\dot{p}} \left((\beta_{i,j})_{i,j=1}^n \right) = (\beta_{i,j})_{i,j=1}^n$ □

Wir wissen, dass $I_\ell^{\dot{p}} \circ D_\ell^{\dot{p}} = \text{id}_{\mathfrak{L}_n \mathbb{R}}$ nicht gelten kann, da $D_\ell^{\dot{p}}$ nicht injektiv ist. Folgendes Lemma klärt die Situation:

Lemma 6.3.10:

Für die Abbildung $I_\ell^{\dot{p}} \circ D_\ell^{\dot{p}} : \mathfrak{L}_n \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{L}_n \mathbb{R}$ gilt:

$$I_\ell^{\dot{p}} \circ D_\ell^{\dot{p}} \left(\begin{pmatrix} g_{1,1} & & & 0 \\ g_{2,1} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ g_{n,1} & \cdots & g_{n,n-1} & g_{n,n} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} g_{1,1} & & & 0 \\ g_{2,1} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & g_{n,n-1} & g_{n,n} \end{pmatrix}$$

d.h. insbesondere ist sie auf Haupt- und unterer Nebendiagonale die Identität.

Beweis:

Sei $g \in \mathfrak{L}_n \mathbb{R}$. $(d_{i,j})_{i,j=1}^n := D_\ell^{\dot{p}}(g)$, $(\alpha_{i,j})_{i,j=1}^n := I_\ell^{\dot{p}} \left((d_{i,j})_{i,j=1}^n \right)$ Mit den Sätzen 6.3.7 und 6.3.9 berechnen wir:

- $\alpha_{i,i} = \sum_{k=1}^{i-1} \binom{k}{n} \frac{d_{k,k+1}}{b_k} - \sum_{k=i}^{n-1} \binom{n-k}{n} \frac{d_{k,k+1}}{b_k} = \sum_{k=1}^{i-1} \binom{k}{n} \frac{b_k (g_{k+1,k+1} - g_{k,k})}{b_k} - \sum_{k=i}^{n-1} \binom{n-k}{n} \frac{b_k (g_{k+1,k+1} - g_{k,k})}{b_k}$
 $= \sum_{k=1}^{i-1} \left(\left(1 - \frac{n-k}{n} \right) (g_{k+1,k+1} - g_{k,k}) \right) - \sum_{k=i}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n} (g_{k+1,k+1} - g_{k,k}) \right)$
 $= \left(\sum_{k=1}^{i-1} g_{k+1,k+1} \right) - \left(\sum_{k=1}^{i-1} g_{k,k} \right) - \left(\sum_{k=1}^{i-1} \frac{n-k}{n} g_{k+1,k+1} \right) + \left(\sum_{k=1}^{i-1} \frac{n-k}{n} g_{k,k} \right) - \left(\sum_{k=i}^{n-1} \frac{n-k}{n} g_{k+1,k+1} \right) + \left(\sum_{k=i}^{n-1} \frac{n-k}{n} g_{k,k} \right)$
 $= \left(\sum_{k=1}^{i-1} g_{k+1,k+1} \right) - \left(\sum_{k=1}^{i-1} g_{k,k} \right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n} g_{k+1,k+1} \right) + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n} g_{k,k} \right)$
 $= \left(\sum_{k=2}^i g_{k,k} \right) - \left(\sum_{k=1}^{i-1} g_{k,k} \right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n} g_{k+1,k+1} \right) + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n} g_{k,k} \right)$
 $= g_{i,i} - g_{1,1} - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n} g_{k+1,k+1} \right) + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n} g_{k,k} \right)$
 $= g_{i,i} - g_{1,1} + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n} g_{k,k} \right) - \left(\sum_{k=2}^n \frac{n-k+1}{n} g_{k,k} \right)$
 $= g_{i,i} - g_{1,1} + \frac{n-1}{n} g_{1,1} - \frac{n-n+1}{n} g_{n,n} + \left(\sum_{k=2}^{n-1} \frac{n-k}{n} g_{k,k} \right) - \left(\sum_{k=2}^{n-1} \frac{n-k+1}{n} g_{k,k} \right)$
 $= g_{i,i} - g_{1,1} + g_{1,1} - \frac{1}{n} g_{1,1} - \frac{1}{n} g_{n,n} + \left(\sum_{k=2}^{n-1} \frac{n-k-n+k-1}{n} g_{k,k} \right)$
 $= g_{i,i} - \frac{1}{n} g_{1,1} - \frac{1}{n} g_{n,n} - \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n-1} g_{k,k} = g_{i,i} - \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{k=1}^n g_{k,k}}_{=0 \text{ da } \text{tr}(g)=0}$

$$\begin{aligned}
&= g_{i,i} \quad \text{für } i \in \{1, \dots, n\} \\
\bullet \alpha_{i+1,i} &= \frac{1}{b_i} \sum_{k=1}^i d_{k,k} = \frac{1}{b_i} \left(d_{1,1} + \sum_{k=2}^i d_{k,k} \right) = \frac{1}{b_i} \left(b_1 g_{2,1} + \sum_{k=2}^i (b_k g_{k+1,k} - b_{k-1} g_{k,k-1}) \right) \\
&= \frac{1}{b_i} \left(b_1 g_{2,1} + \sum_{k=2}^i (b_k g_{k+1,k}) - \sum_{k=2}^i (b_{k-1} g_{k,k-1}) \right) = \frac{1}{b_i} \left(b_1 g_{2,1} + \sum_{k=2}^i (b_k g_{k+1,k}) - \sum_{k=1}^{i-1} (b_k g_{k+1,k}) \right) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{b_1} (b_1 g_{2,1}) = g_{2,1} & \text{für } i = 1 \\ \frac{1}{b_i} (b_1 g_{2,1} + b_i g_{i+1,i} - b_1 g_{2,1}) = g_{i+1,i} & \text{für } i \in \{2, \dots, n-1\} \end{cases} \\
\bullet \alpha_{i,j} &= 0 \text{ sonst} \quad \square
\end{aligned}$$

Satz 6.3.11: (Der Raum $\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}$)

Es ist

$$\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}} = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 & w_1 & & & 0 \\ w_1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & & w_{n-1} \\ 0 & & & w_{n-1} & v_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp \right\}$$

(offenbar ein Untervektorraum von $\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp$ was wir uns schon zu Beginn des Abschnittes 6.3 überlegt hatten)

Beweis:

(Die Menge oben sei für diesen Beweis mit M bezeichnet.)

“ \subset ”:

Folgt direkt wegen der Surjektivität von $D_\ell^{\dot{p}}$ aus Satz 6.3.7.

“ \supset ”:

Im Beweis von Satz 6.3.9 zur Abbildung $I_\ell^{\dot{p}}$ wurde für die Wohldefiniertheit $I_\ell^{\dot{p}}(B) \in \mathfrak{l}_n \mathbb{R}$ von der Matrix B nur verlangt, dass sie eine Tridiagonalmatrix ist.

Wir dehnen so für diesen Beweis $I_\ell^{\dot{p}}$ auf beliebige Tridiagonalmatrizen aus, wobei uns dann die in 6.3.9 bewiesene Identität $D_\ell^{\dot{p}} \circ I_\ell^{\dot{p}} = \text{id}_{\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}}$ zunächst nicht zur Verfügung steht.

Ist nun $B \in M$ (also insbesondere eine Tridiagonalmatrix), so gilt $I_\ell^{\dot{p}}(B) \in \mathfrak{l}_n \mathbb{R}$ also: $D_\ell^{\dot{p}} \circ I_\ell^{\dot{p}}(B) \in \mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}$

Im Beweis von 6.3.9 wurde für die Identität $D_\ell^{\dot{p}} \circ I_\ell^{\dot{p}} = \text{id}$ (auf Matrixebene nachgerechnet, nicht auf $\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}$ beschränkt) zusätzlich noch benötigt, dass $\text{tr}(B) = 0$ gilt. Da für unsere Matrix $B \in \mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp$ gilt, ist diese Bedingung erfüllt und die Identität steht uns zur Verfügung. Es gilt also:

$$B = \text{id}(B) = D_\ell^{\dot{p}} \circ I_\ell^{\dot{p}}(B) \in \mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}$$

Damit ist “ \supset ” gezeigt. □

Lemma 6.3.12: (Linearität von $D_\ell^{\dot{p}}$ und $I_\ell^{\dot{p}}$)

Die Abbildungen $D_\ell^{\dot{p}} : \mathfrak{l}_n \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}$ und $I_\ell^{\dot{p}} : \mathcal{O}_\ell^{\dot{p}} \rightarrow \mathfrak{l}_n \mathbb{R}$ sind linear.

Beweis:

$D_\ell^{\dot{p}} = \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}([\bar{\ell}, \cdot])$ ist linear wegen der Linearität von $\pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}$ und der von $[\cdot, \cdot]$ in der zweiten Komponente.

Nach Satz 6.3.9 ist die Abbildung $I_\ell^{\dot{p}}$ gegeben durch: $I_\ell^{\dot{p}} \left((\beta_{i,j})_{i,j=1}^n \right) =: (\alpha_{i,j})_{i,j=1}^n$ wobei

$$\begin{aligned}
\alpha_{i,i} &:= \sum_{k=1}^{i-1} \left(\frac{k}{n} \frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} \right) - \sum_{k=i}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n} \frac{\beta_{k,k+1}}{b_k} \right) \quad \text{für } i \in \{1, \dots, n\} \\
\alpha_{i+1,i} &:= \frac{1}{b_i} \sum_{k=1}^i \beta_{k,k} \quad \text{für } i \in \{1, \dots, n-1\} \\
\alpha_{i,j} &:= 0 \quad \text{sonst}
\end{aligned}$$

Offenbar sind alle Gleichungen linear in den $\beta_{i,j}$ also ist $I_\ell^{\dot{p}}$ insgesamt linear. □

In Bemerkung 6.3.8 wurde bereits festgestellt, dass die Elemente aus $\mathfrak{l}_n\mathbb{R}$ Tangentialvektoren aus $T_\ell\mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#}$ nicht eindeutig bestimmen. Wir sind nun in der Lage eine genauere Aussage zu treffen.

Definition 6.3.13: (Die Räume $\mathcal{L}_{[\mu]}$)

Zu $[\mu] \in T_\ell\mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#}$ definieren wir

$$\mathcal{L}_{[\mu]} := \left\{ g \in \mathfrak{l}_n\mathbb{R} \mid D_\ell^{\dot{p}}(g) = \iota_{\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}}^{T_\ell\mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#}}([\mu]) \right\} \subset \mathfrak{l}_n\mathbb{R}$$

(die dem Tangentialvektor $[\mu]$ entsprechenden Matrizen aus $\mathfrak{l}_n\mathbb{R}$)

Satz 6.3.14:

Sei $[\mu] \in T_\ell\mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#}$. Dann existieren eindeutige Zahlen $c_1^{[\mu]}, \dots, c_n^{[\mu]}, d_1^{[\mu]}, \dots, d_{n-1}^{[\mu]} \in \mathbb{R}$ so dass gilt:

$$\mathcal{L}_{[\mu]} = \left\{ \begin{pmatrix} c_1^{[\mu]} & & & 0 \\ d_1^{[\mu]} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ * & & d_{n-1}^{[\mu]} & c_n^{[\mu]} \end{pmatrix} \in \mathfrak{l}_n\mathbb{R} \right\}$$

d.h. ein Tangentialvektor legt eindeutig die Haupt- und untere Nebendiagonale der ihm entsprechenden Elemente aus $\mathfrak{l}_n\mathbb{R}$ fest und umgekehrt.

Beweis:

Die Menge auf der rechten Seite oben sei für diesen Beweis mit M bezeichnet.

Seien $g, h \in \mathfrak{l}_n\mathbb{R}$ mit $D_\ell^{\dot{p}}(h) = D_\ell^{\dot{p}}(g) = \iota_{\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}}^{T_\ell\mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#}}([\mu])$ (also $g, h \in \mathcal{L}_{[\mu]}$).

$$\Rightarrow I_\ell^{\dot{p}} \circ D_\ell^{\dot{p}}(g) = I_\ell^{\dot{p}} \circ D_\ell^{\dot{p}}(h)$$

Nach Lemm 6.3.10 stimmen damit die Haupt- und untere Nebendiagonale von g und h überein. Wir wählen diese Diagonalelemente zur Definition von $c_1^{[\mu]}, \dots, c_n^{[\mu]}, d_1^{[\mu]}, \dots, d_{n-1}^{[\mu]} \in \mathbb{R}$. Dann ist “ \subset ” gezeigt.

Sei wieder $g \in \mathfrak{l}_n\mathbb{R}$ mit $D_\ell^{\dot{p}}(g) = \iota_{\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}}^{T_\ell\mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#}}([\mu])$ also gilt bereits $g \in M$. Ist nun $f \in M$ beliebig so stimmen damit die Haupt- und untere Nebendiagonale von f und g überein, also gilt nach Lemma 6.3.10:

$$I_\ell^{\dot{p}} \circ D_\ell^{\dot{p}}(f) = I_\ell^{\dot{p}} \circ D_\ell^{\dot{p}}(g) \implies D_\ell^{\dot{p}} \circ I_\ell^{\dot{p}} \circ D_\ell^{\dot{p}}(f) = D_\ell^{\dot{p}} \circ I_\ell^{\dot{p}} \circ D_\ell^{\dot{p}}(g)$$

In Satz 6.3.9 ii) wurde die Identität $D_\ell^{\dot{p}} \circ I_\ell^{\dot{p}} = \text{id}_{\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}}$ gezeigt, woraus nun folgt:

$$D_\ell^{\dot{p}}(f) = D_\ell^{\dot{p}}(g) = \iota_{\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}}^{T_\ell\mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#}}([\mu])$$

d.h. $f \in \mathcal{L}_{[\mu]}$. Damit ist auch “ \supset ” bewiesen. □

Bemerkung 6.3.15:

Aus Satz 6.3.14 (oder auch aus Satz 6.3.11) folgt (man beachte, dass die Hauptdiagonalelemente nur $(n-1)$ Dimensionen besitzen wegen der Forderung $\text{tr}(A) = 0$ für $A \in \mathfrak{l}_n\mathbb{R}$)

$$\dim(\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}) = 2(n-1) = 2n-2$$

Da $\iota_{\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}}^{T_\ell\mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#}}$ ein Isomorphismus ist folgt also

$$\dim(T_\ell\mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#}) = 2n-2$$

Damit ist gezeigt:

$$\dim(\mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#}) = 2n-2 \quad (\text{als Mannigfaltigkeit})$$

6.4 $\mathcal{O}_p^{l_n \mathbb{R}^\#}$ als symplektische Mannigfaltigkeit

Wir wollen nun auf der Ebene von $l_n \mathbb{R}$ eine symplektische Struktur auf jedem der Tangentialräume $T_\ell \mathcal{O}_p^{l_n \mathbb{R}^\#}$ einführen, so dass diese Räume zu symplektischen Vektorräumen werden. Dass wir die Definition in $l_n \mathbb{R}$ durchführen, wo wir keine eindeutige Zuordnung zu Tangentialvektoren haben, mag zunächst etwas seltsam anmuten, wird sich aber später als sehr nützlich erweisen.

Wir vereinbaren für diesen Abschnitt zunächst wieder: $\ell \in \mathcal{O}_p^{l_n \mathbb{R}^\#}$ und $\bar{\ell} := \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^{\perp} \left(\iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}}^{\perp}(\ell) \right) \in \mathcal{O}^p \subset \mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp$ die zugehörige Matrix, gegeben durch:

$$\bar{\ell} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & 0 \\ b_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

Definition 6.4.1:

Auf $T_\ell \mathcal{O}_p^{l_n \mathbb{R}^\#}$ sei

$$\Omega_\ell : T_\ell \mathcal{O}_p^{l_n \mathbb{R}^\#} \times T_\ell \mathcal{O}_p^{l_n \mathbb{R}^\#} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definiert durch:

$$[\mu], [\eta] \in T_\ell \mathcal{O}_p^{l_n \mathbb{R}^\#}, \dot{\mu} \in \mathcal{L}_{[\mu]}, \dot{\eta} \in \mathcal{L}_{[\eta]} \implies \Omega_\ell([\mu], [\eta]) := \ell([\dot{\mu}, \dot{\eta}])$$

Die Wohldefiniertheit und weitere Eigenschaften klärt der folgende Satz:

Satz 6.4.2:

Es gilt:

- i. Ω_ℓ ist wohldefiniert und $(T_\ell \mathcal{O}_p^{l_n \mathbb{R}^\#}, \Omega_\ell)$ ein symplektischer Vektorraum
- ii. Sind $[\hat{\gamma}], [\hat{\gamma}'] \in T_\ell \mathcal{O}_p^{l_n \mathbb{R}^\#}$ und $\gamma \in \mathcal{L}_{[\hat{\gamma}]}, \gamma' \in \mathcal{L}_{[\hat{\gamma}]}$ mit

$$\gamma = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ \beta_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ * & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}, \gamma' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 & & & 0 \\ \beta'_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ * & & \beta'_{n-1} & \alpha'_n \end{pmatrix}$$

so gilt:

$$\Omega_\ell([\hat{\gamma}], [\hat{\gamma}']) = \sum_{k=1}^{n-1} (b_k (\beta_k (\alpha'_k - \alpha'_{k+1}) - \beta'_k (\alpha_k - \alpha_{k+1})))$$

Beweis:

Zunächst folgt aus ii), dass Ω_ℓ wohldefiniert ist, da nach Satz 6.3.14 die Haupt- und untere Nebendiagonale der Matrizen aus $\mathcal{L}_{[\hat{\gamma}]}$ und $\mathcal{L}_{[\hat{\gamma}]}$ eindeutig durch die entsprechenden Tangentialvektoren bestimmt ist und in der Formel ii) nur diese Einträge auftreten.

Zu ii):

Für $X \in l_n \mathbb{R}$ berechnet man:

$$(\bar{\ell}X)_{k,k} = \sum_{j=1}^n \bar{\ell}_{k,j} \underbrace{x_{j,k}}_{=0 \text{ für } j < k} = \sum_{j=k}^n \bar{\ell}_{k,j} x_{j,k} = \begin{cases} a_k x_{k,k} + b_k x_{k+1,k} & \text{für } k \in \{1, \dots, n-1\} \\ a_n x_{n,n} & \text{für } k = n \end{cases}$$

Damit folgt:

$$\text{tr}(\bar{\ell}X) = \sum_{k=1}^n (\bar{\ell}X)_{k,k} = \sum_{k=1}^n a_k x_{k,k} + \sum_{k=1}^{n-1} b_k x_{k+1,k} \quad (\star)$$

Wir wollen $\Omega_\ell([\hat{\gamma}], [\hat{\gamma}']) \stackrel{\text{Def.}}{=} \ell([\gamma, \gamma']) = \text{tr}(\bar{\ell}[\gamma, \gamma']) = \text{tr}(\bar{\ell}(\gamma\gamma' - \gamma'\gamma))$ berechnen. Dazu:

$$\begin{aligned} (\gamma\gamma')_{k,k} &= \sum_{j=1}^n \underbrace{\gamma_{k,j}}_{=0 \text{ f\"ur } j>k} \underbrace{\gamma'_{j,k}}_{=0 \text{ f\"ur } j<k} = \gamma_{k,k}\gamma'_{k,k} = \alpha_k\alpha'_k \\ (\gamma\gamma')_{k+1,k} &= \sum_{j=1}^n \underbrace{\gamma_{k+1,j}}_{=0 \text{ f\"ur } j>k+1} \underbrace{\gamma'_{j,k}}_{=0 \text{ f\"ur } j<k} = \gamma_{k+1,k}\gamma'_{k,k} + \gamma_{k+1,k+1}\gamma'_{k+1,k} = \beta_k\alpha'_k + \alpha_{k+1}\beta'_k \end{aligned}$$

Analog:

$$\begin{aligned} (\gamma'\gamma)_{k,k} &= \alpha'_k\alpha_k \\ (\gamma'\gamma)_{k+1,k} &= \beta'_k\alpha_k + \alpha'_{k+1}\beta_k \end{aligned}$$

Damit ist zunächst:

$$\sum_{k=1}^n a_k (\gamma\gamma' - \gamma'\gamma)_{k,k} = \sum_{k=1}^n a_k (\alpha_k\alpha'_k - \alpha'_k\alpha_k) = 0$$

Also berechnen wir mit (\star) :

$$\begin{aligned} \Omega_\ell([\hat{\gamma}], [\hat{\gamma}']) &= \text{tr}(\bar{\ell}(\gamma\gamma' - \gamma'\gamma)) \stackrel{(\star)}{=} \sum_{k=1}^n a_k (\gamma\gamma' - \gamma'\gamma)_{k,k} + \sum_{k=1}^{n-1} b_k (\gamma\gamma' - \gamma'\gamma)_{k+1,k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} b_k (\gamma\gamma' - \gamma'\gamma)_{k+1,k} = \sum_{k=1}^{n-1} (b_k (\beta_k\alpha'_k + \alpha_{k+1}\beta'_k - \beta'_k\alpha_k - \alpha'_{k+1}\beta_k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (b_k (\beta_k (\alpha'_k - \alpha'_{k+1}) - \beta'_k (\alpha_k - \alpha_{k+1}))) \end{aligned}$$

Damit ist ii) gezeigt.

Es ist jetzt noch zu zeigen, dass $(T_\ell\mathcal{O}_\ell^{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#}, \Omega_\ell)$ ein symplektischer Vektorraum ist. Dazu:
Nach Definition und wegen der gezeigten Wohldefiniertheit ist

$$\Omega_\ell([\mu], [\eta]) = \ell\left(\left[I_\ell^{\dot{p}}\left(\iota_{\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}}^{T_\ell\mathcal{O}_\ell^{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#}}([\mu])\right), I_\ell^{\dot{p}}\left(\iota_{\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}}^{T_\ell\mathcal{O}_\ell^{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#}}([\eta])\right)\right]\right)$$

Da $\iota_{\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}}^{T_\ell\mathcal{O}_\ell^{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#}}$ ein Isomorphismus also linear, die Abbildung $I_\ell^{\dot{p}}$ nach Lemma 6.3.12 linear, $[\cdot, \cdot]$ bilinear und ℓ linear (wegen $\ell \in \mathcal{O}_\ell^{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#} \subset \mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\# = \text{Hom}(\mathfrak{l}_n\mathbb{R}, \mathbb{R})$) ist, folgt sofort, dass Ω_ℓ bilinear ist. Außerdem folgt, dass Ω_ℓ schiefsymmetrisch ist, denn $[\cdot, \cdot]$ ist schiefsymmetrisch (und ℓ linear). Es bleibt also zu zeigen, dass Ω_ℓ nichtausgartet ist. Dazu sei $[\hat{\mu}] \in T_\ell\mathcal{O}_\ell^{\mathfrak{l}_n\mathbb{R}^\#}$, $[\hat{\mu}] \neq 0$ und $\mu \in \mathcal{L}[\hat{\mu}]$, gegeben durch

$$\mu = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & 0 \\ \beta_1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ * & & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Wir konstruieren direkt einen Tangentialvektor, durch Definition eines zugehörigen Elementes in $\mathfrak{l}_n\mathbb{R}$ und rechnen dann nach, dass dieser die gewünschte Eigenschaft besitzt. Zunächst stellen wir fest: $[\hat{\mu}] \neq 0 \Rightarrow$ nicht alle α_k und β_k sind 0 (wegen Satz 6.3.14).

Wir definieren:

$$\mu' := \begin{pmatrix} \alpha'_1 & & & & 0 \\ \beta'_1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ * & & & \beta'_{n-1} & \alpha'_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{l}_n\mathbb{R}$$

durch:

$$\begin{aligned}\beta'_i &:= \alpha_{i+1} - \alpha_i && \text{für } i \in \{1, \dots, n-1\} \\ \alpha'_i &:= \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j \right) - \sum_{j=1}^{i-1} \beta_j && \text{für } i \in \{1, \dots, n\}\end{aligned}$$

Es ist tatsächlich $\mu' \in \mathfrak{l}_n \mathbb{R}$, denn:

$$\sum_{i=1}^n \alpha'_i = \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j \right) - \sum_{j=1}^{i-1} \beta_j \right) = n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \beta_j = 0$$

Es sei $T_\ell \mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} \ni [\hat{\mu}'] := \iota_{T_\ell \mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}}^{\mathcal{O}_\ell^{\mathfrak{p}}} (D_\ell^{\mathfrak{p}}(\mu'))$. Vorab berechnet man:

$$\alpha'_i - \alpha'_{i+1} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j \right) - \sum_{j=1}^{i-1} \beta_j - \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j \right) + \sum_{j=1}^i \beta_j = \beta_i$$

Damit erhalten wir nun mit ii):

$$\begin{aligned}\Omega_\ell([\hat{\mu}], [\hat{\mu}']) &= \sum_{k=1}^{n-1} (b_k (\beta_k (\alpha'_k - \alpha'_{k+1}) - \beta'_k (\alpha_k - \alpha_{k+1}))) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (b_k (\beta_k \beta_k - (\alpha_{k+1} - \alpha_k) (\alpha_k - \alpha_{k+1}))) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (b_k ((\beta_k)^2 + (\alpha_k - \alpha_{k+1})^2))\end{aligned}$$

- Falls ein $\beta_k \neq 0$ so folgt damit: $\Omega_\ell([\hat{\mu}], [\hat{\mu}']) > 0$ (wegen $b_k > 0$ nach Satz 6.2.2)
- Falls alle $\beta_k = 0$:
Annahme: $\alpha_i - \alpha_{i+1} = 0 \forall i \in \{1, \dots, n-1\}$ d.h. $\alpha_i = \alpha_{i+1} \forall i \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$. Dann folgt aber wegen $0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i = n\alpha_1$, dass $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ im Widerspruch zu $[\hat{\mu}] \neq 0$ (vgl. oben!)
 $\implies \alpha_i - \alpha_{i+1} \neq 0$ für wenigstens ein i
 $\implies \Omega_\ell([\hat{\mu}], [\hat{\mu}']) > 0$ (wegen $b_k > 0$)

In jedem Fall ist also $\Omega_\ell([\hat{\mu}], [\hat{\mu}']) > 0$ und Ω_ℓ damit nichtausgeartet. Also ist bewiesen, dass Ω_ℓ eine symplektische Struktur auf $T_\ell \mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}$ ist. \square

Satz 6.4.3: (Ω_ℓ im Raum $\mathcal{O}_\ell^{\mathfrak{p}}$)

Seien $[\mu], [\eta] \in T_\ell \mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}$ und

$$\iota_{\mathcal{O}_\ell^{\mathfrak{p}}}^{T_\ell \mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}}([\mu]) =: \begin{pmatrix} v_1 & w_1 & & 0 \\ w_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & w_{n-1} \\ 0 & & w_{n-1} & v_n \end{pmatrix}, \quad \iota_{\mathcal{O}_\ell^{\mathfrak{p}}}^{T_\ell \mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}}([\eta]) =: \begin{pmatrix} v'_1 & w'_1 & & 0 \\ w'_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & w'_{n-1} \\ 0 & & w'_{n-1} & v'_n \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\Omega_\ell([\mu], [\eta]) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^k \left(\frac{1}{b_k} (v'_l w_k - v_l w'_k) \right)$$

Beweis:

Die beiden Matrizen seien mit g bzw. g' bezeichnet und wir setzen

$$I_\ell^{\dot{p}}(g) =: \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ \beta_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ * & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_{[\mu]}, \quad I_\ell^{\dot{p}}(g') =: \begin{pmatrix} \alpha'_1 & & & 0 \\ \beta'_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ * & & \beta'_{n-1} & \alpha'_n \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_{[\eta]}$$

Mit Satz 6.3.9 folgt:

$$\begin{aligned} \alpha_i - \alpha_{i+1} &= \sum_{k=1}^{i-1} \binom{k}{n} \frac{w_k}{b_k} - \sum_{k=i}^{n-1} \binom{n-k}{n} \frac{w_k}{b_k} - \sum_{k=1}^i \binom{k}{n} \frac{w_k}{b_k} + \sum_{k=i+1}^{n-1} \binom{n-k}{n} \frac{w_k}{b_k} \\ &= -\frac{i}{n} \frac{w_i}{b_i} - \frac{n-i}{n} \frac{w_i}{b_i} = -\frac{1}{b_i} \left(\frac{i+n-i}{n} w_i \right) \\ &= -\frac{1}{b_i} w_i \end{aligned}$$

Analog: $\alpha'_i - \alpha'_{i+1} = -\frac{1}{b_i} w'_i$

Damit gilt nach Satz 6.4.2:

$$\begin{aligned} \Omega_\ell([\mu], [\eta]) &= \sum_{k=1}^{n-1} (b_k (\beta_k (\alpha'_k - \alpha'_{k+1}) - \beta'_k (\alpha_k - \alpha_{k+1}))) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(b_k \left(\beta_k \left(-\frac{1}{b_k} w'_k \right) - \beta'_k \left(-\frac{1}{b_k} w_k \right) \right) \right) \\ &\stackrel{\text{Satz 6.3.9}}{=} \sum_{k=1}^{n-1} \left(b_k \left(\left(\frac{1}{b_k} \sum_{l=1}^k v_l \right) \left(-\frac{1}{b_k} w'_k \right) - \left(\frac{1}{b_k} \sum_{l=1}^k v'_l \right) \left(-\frac{1}{b_k} w_k \right) \right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(b_k \left(\left(\frac{1}{b_k} \sum_{l=1}^k v'_l \right) \left(\frac{1}{b_k} w_k \right) - \left(\frac{1}{b_k} \sum_{l=1}^k v_l \right) \left(\frac{1}{b_k} w'_k \right) \right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{b_k} \left(\left(\sum_{l=1}^k v'_l w_k \right) - \left(\sum_{l=1}^k v_l w'_k \right) \right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^k \left(\frac{1}{b_k} (v'_l w_k - v_l w'_k) \right) \end{aligned}$$

□

Bisher hatten wir die Tangentialräume jeweils einzeln betrachtet. Wir sind nun jedoch in der Lage zum Differentialformenkalkül überzugehen. Dazu lösen wir uns von unseren Vereinbarungen über ℓ und $\bar{\ell}$, die wir anfangs getroffen hatten.

Lemma 6.4.4:

Die Abbildungen $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_{n-1} : \iota_n \mathbb{R}^\# \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^{\perp \mathfrak{o}_n \mathbb{R}} \left(\iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}}^{\iota_n \mathbb{R}^\#}(\ell) \right) = \begin{pmatrix} \hat{a}_1(\ell) & \hat{b}_1(\ell) & & * \\ \hat{b}_1(\ell) & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \hat{b}_{n-1}(\ell) \\ * & & \hat{b}_{n-1}(\ell) & \hat{a}_n(\ell) \end{pmatrix} \quad \forall \ell \in \iota_n \mathbb{R}^\#$$

sind glatt, also aus $C^\infty(\iota_n \mathbb{R}^\#)$. Außerdem sind es lineare Abbildungen.

Beweis:

$\iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^\perp \circ \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}$ ist als Isomorphismus und nach Konstruktion der differenzierbaren Struktur $\mathcal{D}(\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#)$ aus Abschnitt 3 und der Standardstruktur eines \mathbb{R}^N auf $\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp$ glatt, also sind auch die Komponenten glatt. Die Linearität folgt ebenfalls da $\iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^\perp \circ \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}$ ein Isomorphismus, also linear ist. \square

Definition 6.4.5:

Es seien $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n-1} : \mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$a_k := \hat{a}_k \circ \chi, \quad b_k := \hat{b}_k \circ \chi$$

wobei

$$\chi : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} & \longrightarrow & \mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\# \\ \ell & \longmapsto & \ell \end{array}$$

die Inklusion bezeichne, die glatt ist da (nach Bemerkung 6.1.3) $\mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#$ ist. Damit ist also

$$a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n-1} \in C^\infty \left(\mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} \right)$$

Lemma 6.4.6:

Für $\ell \in \mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}$ gilt:

$$\iota_{\mathcal{O}_\ell^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}}^{T_\ell \mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}}([\mu]) = \begin{pmatrix} d_\ell a_1([\mu]) & d_\ell b_1([\mu]) & & & 0 \\ d_\ell b_1([\mu]) & \ddots & & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & d_\ell b_{n-1}([\mu]) \\ 0 & & d_\ell b_{n-1}([\mu]) & d_\ell a_n([\mu]) & \end{pmatrix} \quad \forall [\mu] \in T_\ell \mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}$$

Beweis:

Es ist

$$\begin{aligned} d_\ell a_i([\mu]) &= (a_i \circ \mu)'(0)|_1 = (\hat{a}_i \circ \chi \circ \mu)'(0)|_1 \\ &= \underbrace{\hat{a}_i'}_{\text{linear}}((\chi \circ \mu)(0)) \circ (\chi \circ \mu)'(0)|_1 \quad (\text{beachte: } \mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\# \text{ ist Banachraum}) \\ &= \hat{a}_i \circ (\chi \circ \mu)'(0)|_1 \\ &= \hat{a}_i \left(\iota_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}^{T_\ell \mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}([\mu]) \right) \end{aligned} \quad (\star)$$

$$\text{Analog: } d_\ell b_i([\mu]) = \hat{b}_i \left(\iota_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}^{T_\ell \mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}([\mu]) \right)$$

Wir hatten folgende Identifikation verwendet:

$$\iota_{\mathcal{O}_\ell^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}}^{T_\ell \mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}} = \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^\perp \circ \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} \circ \iota_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}^{T_\ell \mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}$$

Damit ist

$$\iota_{\mathcal{O}_\ell^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}}^{T_\ell \mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}}([\mu]) = \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^\perp \left(\iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} \left(\iota_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}^{T_\ell \mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}([\mu]) \right) \right)$$

Da \hat{a}_i gerade als i, i -Komponente und \hat{b}_i als $i, i+1$ -Komponente der Abbildung $\iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^\perp \circ \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}$ definiert war ist damit

$$\iota_{\mathcal{O}_\ell^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}}^{T_\ell \mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}}([\mu]) = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \left(\iota_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}^{T_\ell \mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}([\mu]) \right) & \hat{b}_1 \left(\iota_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}^{T_\ell \mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}([\mu]) \right) & & & 0 \\ \hat{b}_1 \left(\iota_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}^{T_\ell \mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}([\mu]) \right) & \ddots & & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \hat{b}_{n-1} \left(\iota_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}^{T_\ell \mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}([\mu]) \right) & \hat{a}_n \left(\iota_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}^{T_\ell \mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}([\mu]) \right) & \\ 0 & & \hat{b}_{n-1} \left(\iota_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}^{T_\ell \mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}([\mu]) \right) & \hat{a}_n \left(\iota_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}^{T_\ell \mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}([\mu]) \right) & \end{pmatrix}$$

Also folgt die Behauptung aus (\star) . \square

Definition 6.4.7:

Es sei

$$\hat{\Omega} := \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^k \frac{db_k}{b_k} \wedge da_l \in \Omega^2 \left(\mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#} \right)$$

(Es ist $b_k > 0$ nach Satz 6.2.2 und da $a_k, b_k \in C^\infty \left(\mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#} \right)$ sind $da_k, db_k \in \Omega^1 \left(\mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#} \right)$. Also ist tatsächlich $\hat{\Omega} \in \Omega^2 \left(\mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#} \right)$ wohldefiniert.)

Nun besitzen wir auf $\mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#}$ zwei Differentialformen: $\hat{\Omega} \in \Omega^2 \left(\mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#} \right)$ und das Ω welches wir mit Definition 6.4.1 direkt in den Tangentialräumen erklärt hatten. Von $\hat{\Omega}$ kennen wir die globale Eigenschaft, dass es glatt ist, wir wissen aber nicht, welche Eigenschaften es in den Tangentialräumen besitzt. Von Ω hingegen kennen wir viele seiner Eigenschaften in den Tangentialräumen, dafür aber bisher keine globalen Eigenschaften, wir wissen beispielsweise nicht, ob es glatt ist. Der folgende Satz klärt die Situation:

Satz 6.4.8:

Es gilt:

- i. $\hat{\Omega} = \Omega$ d.h. insbesondere ist $\Omega \in \Omega^2 \left(\mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#} \right)$
- ii. Ω ist eine symplektische Form auf $\mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#}$, d.h. $\left(\mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#}, \Omega \right)$ eine symplektische Mannigfaltigkeit

Beweis:

Zu (i): Seien $[\mu], [\eta] \in T_\ell \mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#}$. Wir wissen, dass mit

$$B := \iota_{T_\ell \mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#}}^{\mathcal{O}_p^{\hat{\Omega}}} \left(\begin{pmatrix} d_\ell a_1([\mu]) & d_\ell b_1([\mu]) & & & 0 \\ d_\ell b_1([\mu]) & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & d_\ell b_{n-1}([\mu]) \\ 0 & & & d_\ell b_{n-1}([\mu]) & d_\ell a_n([\mu]) \\ d_\ell a_1([\eta]) & d_\ell b_1([\eta]) & & & 0 \\ d_\ell b_1([\eta]) & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & d_\ell b_{n-1}([\eta]) \\ 0 & & & d_\ell b_{n-1}([\eta]) & d_\ell a_n([\eta]) \end{pmatrix} \right)$$

$$B' := \iota_{T_\ell \mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#}}^{\mathcal{O}_p^{\hat{\Omega}}} \left(\begin{pmatrix} d_\ell a_1([\mu]) & d_\ell b_1([\mu]) & & & 0 \\ d_\ell b_1([\mu]) & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & d_\ell b_{n-1}([\mu]) \\ 0 & & & d_\ell b_{n-1}([\mu]) & d_\ell a_n([\mu]) \\ d_\ell a_1([\eta]) & d_\ell b_1([\eta]) & & & 0 \\ d_\ell b_1([\eta]) & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & d_\ell b_{n-1}([\eta]) \\ 0 & & & d_\ell b_{n-1}([\eta]) & d_\ell a_n([\eta]) \end{pmatrix} \right)$$

nach Lemma 6.4.6 $B = [\mu]$ und $B' = [\eta]$ gilt. Damit ist:

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_\ell([\mu], [\eta]) &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^k \frac{d_\ell b_k}{b_k(\ell)} \wedge d_\ell a_l([\mu], [\eta]) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^k \frac{1}{b_k(\ell)} (d_\ell b_k([\mu]) d_\ell a_l([\eta]) - d_\ell b_k([\eta]) d_\ell a_l([\mu])) \\ &\stackrel{\text{Satz 6.4.3}}{=} \Omega_\ell(B, B') \\ &= \Omega_\ell([\mu], [\eta]) \end{aligned}$$

(Beachte beim Anwenden von Satz 6.4.3 dass die dort auftretende b_k wegen Definition 6.4.5 und Lemma 6.4.4 genau den $b_k(\ell)$ hier entsprechen) Da dies für beliebiges $\ell \in \mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#}$ und beliebige $[\mu], [\eta] \in T_\ell \mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#}$ gilt haben wir i) gezeigt.

Zu (ii):

Aus Satz 6.4.2 wissen wir bereits, dass die Tangentialräume $\left(T_\ell \mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#}, \Omega_\ell \right)$ symplektische Vektorräume sind. Deshalb muss nur noch gezeigt werden, dass $d\Omega = 0$ gilt. Dazu:

$$\begin{aligned}
d\Omega &= d\hat{\Omega} = d\left(\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^k \frac{db_k}{b_k} \wedge da_l\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^k d\left(\frac{db_k}{b_k} \wedge da_l\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^k d\left(\frac{1}{b_k} \wedge db_k \wedge da_l\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^k \left(d\left(\frac{1}{b_k}\right) \wedge db_k \wedge da_l + \frac{1}{b_k} \left(\underbrace{ddb_k}_{=0} \wedge da_l - db_k \wedge \underbrace{dda_l}_{=0} \right) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^k \left(d\left(\frac{1}{b_k}\right) \wedge db_k \wedge da_l \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^k \left(-\frac{1}{(b_k)^2} \underbrace{db_k \wedge db_k}_{=0 \text{ da } db_k \in \Omega^1(\mathcal{O}_p^{l_n \mathbb{R}^\#})} \wedge da_l \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt folgendes benutzt haben:

$$\begin{aligned}
0 &= d1 = d\left(\frac{b_k}{b_k}\right) = d\left(\frac{1}{b_k} \wedge b_k\right) = d\left(\frac{1}{b_k}\right) b_k + \frac{1}{b_k} d(b_k) \\
&\implies d\left(\frac{1}{b_k}\right) = -\frac{1}{(b_k)^2} db_k
\end{aligned}$$

□

Da wir nun $(\mathcal{O}_p^{l_n \mathbb{R}^\#}, \Omega)$ als symplektische Mannigfaltigkeit erkannt haben, wissen wir nach Bemerkung 1.4 dass diese auch auf kanonische Weise eine Poisson-Mannigfaltigkeit ist. Wir wollen beweisen, dass die Inklusion $\chi : \mathcal{O}_p^{l_n \mathbb{R}^\#} \rightarrow l_n \mathbb{R}^\#$ eine Poisson-Abbildung ist. Für diesen Nachweis ist es von Vorteil, dass wir die Definition ursprünglich in $l_n \mathbb{R}$ gegeben haben.

Lemma 6.4.9:

Es ist für beliebiges $\ell \in \mathcal{O}_p^{l_n \mathbb{R}^\#}$ (und zugehöriges $\bar{\ell} := \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^{\perp} \left(\iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}}^{\perp}(\ell) \right) \in \mathcal{O}^{\dot{p}} \subset \mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp$):

$$\iota_{\mathcal{O}_p^{\dot{p}}}^{T_\ell \mathcal{O}_p^{l_n \mathbb{R}^\#}} (X_{h \circ \chi}(\ell)) = \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp} \left(\left[\bar{\ell}, -\iota_{l_n \mathbb{R}}^{l_n \mathbb{R}^\#} (h'(\ell)) \right] \right) \quad \forall h \in C^\infty(l_n \mathbb{R}^\#)$$

d.h. es ist $(-\iota_{l_n \mathbb{R}}^{l_n \mathbb{R}^\#} (h'(\ell))) \in \mathcal{L}_{X_{h \circ \chi}(\ell)}$.

Beweis:

Die Definition des Vektorfeldes $X_{h \circ \chi}$ in $(\mathcal{O}_p^{l_n \mathbb{R}^\#}, \Omega)$ (vgl. Bemerkung 1.4) erfolgte durch die Identität

$$\Omega_\ell (X_{h \circ \chi}(\ell), [\gamma]) = (d_\ell (h \circ \chi))([\gamma]) \quad \forall [\gamma] \in T_\ell \mathcal{O}_p^{l_n \mathbb{R}^\#} \quad \forall \ell \in \mathcal{O}_p^{l_n \mathbb{R}^\#} \quad (\star)$$

welche den Tangentialvektor $X_{h \circ \chi}(\ell)$ eindeutig definiert. Wir zeigen nun, dass für ein beliebiges $\ell \in \mathcal{O}_p^{l_n \mathbb{R}^\#}$

$$\Omega_\ell \left(\iota_{T_\ell \mathcal{O}_p^{l_n \mathbb{R}^\#}}^{\mathcal{O}_p^{\dot{p}}} \left(\pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp} \left(\left[\bar{\ell}, -\iota_{l_n \mathbb{R}}^{l_n \mathbb{R}^\#} (h'(\ell)) \right] \right) \right), [\gamma] \right) = (d_\ell (h \circ \chi))([\gamma]) \quad \forall [\gamma] \in T_\ell \mathcal{O}_p^{l_n \mathbb{R}^\#}$$

gilt, woraus dann wegen der Eindeutigkeit von $X_{h \circ \chi}(\ell)$ in (\star) die Behauptung folgt (da $\iota_{T_\ell \mathcal{O}_p^{l_n \mathbb{R}^\#}}^{\mathcal{O}_p^{\dot{p}}}$ ein Isomorphismus ist). Dazu sei $[\gamma] \in T_\ell \mathcal{O}_p^{l_n \mathbb{R}^\#}$. Wir können $[\gamma] = [\ell \times g_t]$ schreiben für eine Kurve g_t in $l_n \mathbb{R}$ durch e (nach Korollar 6.3.2, vgl. auch den Beweis von Satz 6.3.3 i) für die konkrete Form $[\ell \times g_t]$ mit Kurve durch e).

Man berechnet:

$$\begin{aligned}
& \iota_{T_\ell \mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#}}^{\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}} \left(\pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp} \left(\left[\bar{\ell}, -\iota_{I_n \mathbb{R}^\#}^{I_n \mathbb{R}^\#} (h'(\ell)) \right] \right) \right) \stackrel{\text{Def. 6.3.6}}{=} \iota_{T_\ell \mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#}}^{\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}} \left(D_\ell^{\dot{p}} \left(-\iota_{I_n \mathbb{R}^\#}^{I_n \mathbb{R}^\#} (h'(\ell)) \right) \right) \\
\implies & \iota_{\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}}^{T_\ell \mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#}} \left(\underbrace{\iota_{T_\ell \mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#}}^{\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}} \left(\pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp} \left(\left[\bar{\ell}, -\iota_{I_n \mathbb{R}^\#}^{I_n \mathbb{R}^\#} (h'(\ell)) \right] \right) \right)}_{=:[\eta] \in T_\ell \mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#}} \right) = D_\ell^{\dot{p}} \left(-\iota_{I_n \mathbb{R}^\#}^{I_n \mathbb{R}^\#} (h'(\ell)) \right) \\
\stackrel{\text{Def. 6.3.13}}{\implies} & \left(-\iota_{I_n \mathbb{R}^\#}^{I_n \mathbb{R}^\#} (h'(\ell)) \right) \in \mathcal{L}[\eta] \tag{**}
\end{aligned}$$

Mit Satz 6.3.3 erhalten wir:

$$\begin{aligned}
& \iota_{\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}}^{T_\ell \mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#}}([\gamma]) = \iota_{\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}}^{T_\ell \mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#}}([\ell \times g_t]) = \pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}([\bar{\ell}, g'_t(0)|_1]) = D_\ell^{\dot{p}}(g'_t(0)|_1) \\
\stackrel{\text{Def. 6.3.13}}{\implies} & g'_t(0)|_1 \in \mathcal{L}[\gamma]
\end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned}
\Omega_\ell \left(\iota_{T_\ell \mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#}}^{\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}} \left(\pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp} \left(\left[\bar{\ell}, -\iota_{I_n \mathbb{R}^\#}^{I_n \mathbb{R}^\#} (h'(\ell)) \right] \right) \right), [\gamma] \right) &= \Omega_\ell([\eta], [\ell \times g_t]) \\
&\stackrel{\text{Def. 6.4.1}}{=} \ell \left(\left[-\iota_{I_n \mathbb{R}^\#}^{I_n \mathbb{R}^\#} (h'(\ell)), g'_t(0)|_1 \right] \right) \tag{***}
\end{aligned}$$

Andererseits berechnet man:

$$\begin{aligned}
(d_\ell(h \circ \chi))([\gamma]) &= (d_\ell(h \circ \chi))([\ell \times g_t]) = \frac{d}{dt}(h \circ \chi \circ \ell \times g_t)(0)|_1 = \frac{d}{dt}(h \circ \ell \times g_t)(0)|_1 \\
&\stackrel{\substack{I_n \mathbb{R}^\# \text{ ist} \\ \text{Banachraum}}}{=} \frac{d}{dt}(h)(\ell) \circ \frac{d}{dt}(\ell \times g_t)(0)|_1 = h'(\ell) \left(\frac{d}{dt}(\ell \times g_t)(0)|_1 \right) \\
&\stackrel{\text{Satz 4.11}}{=} \underbrace{h'(\ell)}_{\in I_n \mathbb{R}^\#} \left(\underbrace{\ell \dot{\times} (g'_t(0)|_1)}_{\in I_n \mathbb{R}^\#} \right) \\
&= \ell \dot{\times} (g'_t(0)|_1) \left(\iota_{I_n \mathbb{R}^\#}^{I_n \mathbb{R}^\#} (h'(\ell)) \right) \quad (\text{Definition von } \iota_{I_n \mathbb{R}^\#}^{I_n \mathbb{R}^\#}) \\
&\stackrel{\text{Def. von } \dot{\times}}{=} \ell \left((g'_t(0)|_1) \dot{\times} \iota_{I_n \mathbb{R}^\#}^{I_n \mathbb{R}^\#} (h'(\ell)) \right) \\
&\stackrel{\text{Def. von } \dot{\times}}{=} \ell \left([g'_t(0)|_1, \iota_{I_n \mathbb{R}^\#}^{I_n \mathbb{R}^\#} (h'(\ell))] \right) = \ell \left(-[\iota_{I_n \mathbb{R}^\#}^{I_n \mathbb{R}^\#} (h'(\ell)), g'_t(0)|_1] \right) \\
&= \ell \left([-\iota_{I_n \mathbb{R}^\#}^{I_n \mathbb{R}^\#} (h'(\ell)), g'_t(0)|_1] \right)
\end{aligned}$$

Nach (***) gilt also die Identität

$$\Omega_\ell \left(\iota_{T_\ell \mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#}}^{\mathcal{O}_\ell^{\dot{p}}} \left(\pi_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp} \left(\left[\bar{\ell}, -\iota_{I_n \mathbb{R}^\#}^{I_n \mathbb{R}^\#} (h'(\ell)) \right] \right) \right), [\gamma] \right) = \ell \left([-\iota_{I_n \mathbb{R}^\#}^{I_n \mathbb{R}^\#} (h'(\ell)), g'_t(0)|_1] \right) = (d_\ell(h \circ \chi))([\gamma])$$

Das war gerade zu zeigen. Die angegebene Umformulierung folgt nun da wir $[\eta] = X_{h \circ \chi}(\ell)$ gezeigt haben direkt aus (**). \square

Satz 6.4.10:

Die Inklusion

$$\begin{array}{ccc}
\chi : \mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#} & \longrightarrow & I_n \mathbb{R}^\# \\
& \ell & \longmapsto \ell
\end{array}$$

ist eine Poisson-Abbildung bezüglich der kanonischen Poisson-Struktur von $I_n \mathbb{R}^\#$ und der von $(\mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#}, \Omega)$ induzierten.

Beweis:

Seien $f, g \in C^\infty(\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#)$. Wir haben zu zeigen, dass

$$\{f, g\}_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} \circ \chi = \{f \circ \chi, g \circ \chi\}_{\mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}}$$

gilt. Sei dazu $\ell \in \mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}$. Mit Bemerkung 3.3 folgt wegen $\chi(\ell) = \ell$:

$$\{f, g\}_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} \circ \chi(\ell) = \{f, g\}_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}(\ell) = \ell \left(\left[\iota_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} (f'(\ell)), \iota_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} (g'(\ell)) \right] \right) \quad (\star)$$

Nach Lemma 6.4.9 wissen wir

$$\begin{aligned} \left(-\iota_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} (f'(\ell)) \right) &\in \mathcal{L}_{X_{f \circ \chi}(\ell)} \\ \left(-\iota_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} (g'(\ell)) \right) &\in \mathcal{L}_{X_{g \circ \chi}(\ell)} \end{aligned}$$

Auf $\mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}$ kennen wir die von Ω induzierte Poisson-Klammer aus Bemerkung 1.4 und wir berechnen:

$$\begin{aligned} \{f \circ \chi, g \circ \chi\}_{\mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}}(\ell) &= \Omega_\ell (X_{f \circ \chi}(\ell), X_{g \circ \chi}(\ell)) \\ &\stackrel{\text{Def. 6.4.1}}{=} \ell \left(\left[-\iota_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} (f'(\ell)), -\iota_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} (g'(\ell)) \right] \right) \\ &= \ell \left(\left[\iota_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} (f'(\ell)), \iota_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} (g'(\ell)) \right] \right) \end{aligned}$$

Mit (\star) folgt damit die Identität

$$\{f, g\}_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} \circ \chi(\ell) = \ell \left(\left[\iota_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} (f'(\ell)), \iota_{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} (g'(\ell)) \right] \right) = \{f \circ \chi, g \circ \chi\}_{\mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}}(\ell)$$

also die Behauptung. \square

Damit ist das Hauptresultat dieses Abschnittes bewiesen, welches wir noch einmal geschlossen formulieren wollen:

Theorem 6.4.11:

$(\mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}, \Omega)$ ist eine symplektische Mannigfaltigkeit und die Inklusion

$$\begin{array}{ccc} \chi : \mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} & \longrightarrow & \mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\# \\ \ell & \longmapsto & \ell \end{array}$$

eine Poisson-Abbildung, wobei

$$\Omega = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^k \frac{db_k}{b_k} \wedge da_l \in \Omega^2(\mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#})$$

6.5 Die Poisson-kommutierenden Funktionen \bar{H}_k auf $\mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}$

Wir hatten im Abschnitt 5.2 bereits Poisson-kommutierende Funktionen $\tilde{H}_k \in C^\infty(\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#)$ $k \in \{1, \dots, n\}$ konstruiert. Wir definieren nun

$$\bar{H}_k := \tilde{H}_k \circ \chi \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

Da χ glatt ist, gilt $\bar{H}_k \in C^\infty(\mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#})$. Außerdem garantiert uns Theorem 6.4.11, dass die \bar{H}_k auf der symplektischen Mannigfaltigkeit $(\mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}, \Omega)$ Poisson-kommutieren. Wir überlegen uns noch kurz, welche Gestalt die \bar{H}_k im Matrizenraum $\mathcal{O}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}$ besitzen, der zum Orbit $\mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}$ gehört. In 6.2 hatten wir definiert

$$\mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} := \left. \begin{array}{c} \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}} \\ \circ \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} \end{array} \right|_{\mathcal{O}_p^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#}} = \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}^\perp}^{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}} \circ \iota_{\mathfrak{o}_n \mathbb{R}}^{\mathfrak{l}_n \mathbb{R}^\#} \circ \chi$$

und gesehen, dass dies eine bijektive Abbildung ist. Sei $\ell \in \mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#}$. Dann berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\bar{H}_k(\ell) &= \tilde{H}_k(\chi(\ell)) \stackrel{\text{vgl. 5.2}}{=} \hat{H}_k(\Psi(\chi(\ell))) \\
&\stackrel{\text{vgl. 5.1}}{=} \hat{H}_k\left(\begin{matrix} I_n \mathbb{R}^\# \\ \perp \\ \mathfrak{o}_n \mathbb{R} \end{matrix}(\chi(\ell))\right) \\
&\stackrel{\text{vgl. 5.2}}{=} \frac{1}{k} \text{tr}\left(\begin{matrix} I_n \mathbb{R}^\# \\ \perp \\ \mathfrak{o}_n \mathbb{R} \end{matrix}(\chi(\ell))\right)^k \\
&\stackrel{\text{Bem. 2.6}}{=} \frac{1}{k} \text{tr}\left(\begin{matrix} \perp \\ \mathfrak{o}_n \mathbb{R} \perp \\ \mathfrak{o}_n \mathbb{R} \end{matrix}(\chi(\ell))\right)^k \\
&= \frac{1}{k} \text{tr}\left(\left(\begin{matrix} \mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#} \\ \perp \\ \mathcal{O}_p \end{matrix}(\ell)\right)^k\right)
\end{aligned}$$

d.h. im Matrizenraum \mathcal{O}^p sind die Abbildungen \bar{H}_k durch eine Spurform gegeben.

7 Das Hamilton-System $(Q, \Phi^* \Omega, h_{Toda})$ und das Toda-Lattice $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0, H_{Toda})$

7.1 Vorbereitung: Die Mannigfaltigkeiten $H_1^{-1}(0)$ und $Q = H_1^{-1}(0) \setminus \mathbb{R}$

Wir führen folgende Abbildung auf dem \mathbb{R}^{2n} ein (Gesamtimpuls):

$$\begin{aligned}
H_1 : \mathbb{R}^{2n} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(q, p) &\longmapsto \sum_{k=1}^n p_k
\end{aligned}$$

Diese ist offenbar glatt und man berechnet:

$$\begin{aligned}
\text{rang}(DH_1((q, p))) &= \text{rang}\left(\left(\frac{\partial H_1}{\partial q_1}((q, p)), \dots, \frac{\partial H_1}{\partial q_n}((q, p)), \frac{\partial H_1}{\partial p_1}((q, p)), \dots, \frac{\partial H_1}{\partial p_n}((q, p))\right)\right) \\
&= \text{rang}((0, \dots, 0, 1, \dots, 1)) = 1 \quad \forall (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}
\end{aligned}$$

Damit folgt, dass

$$H_1^{-1}(0) = \left\{ (q, p) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \sum_{k=1}^n p_k = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{2n}$$

eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{2n} ist, mit der Dimension

$$\dim(H_1^{-1}(0)) = 2n - 1$$

also eine Hyperebene. Die Inklusion

$$\begin{array}{ccc}
H_1^{-1}(0) & \xrightarrow{j} & \mathbb{R}^{2n} \\
x & \longmapsto & x
\end{array}$$

ist damit glatt. In \mathbb{R}^{2n} besitzen wir die Standardkoordinaten $q_k, p_k : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ und auf $H_1^{-1}(0)$ entsprechend die Koordinaten $q_k \circ j, p_k \circ j$ die wir der Einfachheit halber wieder mit q_k bzw. p_k bezeichnen wollen, wobei dann für die Koordinatenfunktionen auf $H_1^{-1}(0)$ zusätzlich die Identität

$$\sum_{k=1}^n p_k = 0$$

gilt. Wir führen nun eine Gruppenoperation und eine (zugehörige) Äquivalenzrelation auf $H_1^{-1}(0)$ ein.

Definition 7.1.1: (Translation)

i. Es sei

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times H_1^{-1}(0) &\longrightarrow H_1^{-1}(0) \\ (t, (q, p)) &\longmapsto t \cdot (q, p) := (q + t(1, \dots, 1), p) \end{aligned}$$

(Man rechnet leicht die Eigenschaften einer Gruppenoperation nach)

ii. Die Äquivalenzrelation \sim sei auf $H_1^{-1}(0)$ definiert durch

$$(q, p) \sim (q', p') :\iff q - q' = t(1, \dots, 1) \text{ für ein } t \in \mathbb{R}$$

(Eine einfache Rechnung zeigt, dass dies eine Äquivalenzrelation ist). Damit gilt offenbar für die Äquivalenzklassen:

$$[(q, p)] = \{(q + \mathbb{R}(1, \dots, 1), p) \in H_1^{-1}(0)\}$$

Lemma 7.1.2:

i. Die Gruppenoperation \cdot ist *frei*, d.h. für den Stabilisator $S_{(q,p)}$ von $(q, p) \in H_1^{-1}(0) \setminus \{0\}$ gilt:

$$S_{(q,p)} = \{0\}$$

ii. Für die Orbits von \sim gilt:

$$\mathcal{O}_{(q,p)} = [(q, p)] \subset H_1^{-1}(0)$$

Beweis:

Zum Stabilisator: $S_{(q,p)} = \{t \in \mathbb{R} \mid t \cdot (q, p) = (q, p)\} = \{0\}$ da $(q, p) \neq 0$. ii) ist offensichtlich. □

Bemerkung 7.1.3:

Wir definieren

$$Q := H_1^{-1}(0) / \mathbb{R} := \{[(q, p)] \mid (q, p) \in H_1^{-1}(0)\} = \{\mathcal{O}_{(q,p)} \mid (q, p) \in H_1^{-1}(0)\}$$

Man kann zeigen (vgl. [1], Satz 3.3.18), dass auf dem Quotienten Q mit der Quotiententopologie eine differenzierbare Struktur existiert, die Q zu einer glatte Mannigfaltigkeit macht, so dass die kanonische Restklassenabbildung

$$\begin{aligned} \pi : H_1^{-1}(0) &\longrightarrow Q \\ (q, p) &\longmapsto [(q, p)] \end{aligned}$$

zu einer surjektiven Submersion wird (hier geht im Wesentlichen ein, dass der Quotient Q aus einer freien Gruppenoperation gebildet wird).

Wir führen auf Q nun Koordinatenfunktionen ein. Dazu benötigen wir zunächst folgendes Lemma:

Lemma 7.1.4:

Seien M, N glatte Mannigfaltigkeiten, $f : M \longrightarrow N$ eine surjektive Submersion und $g : N \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann gilt: Ist $g \circ f$ glatt, so ist auch g glatt.

Beweis:

Zunächst ist, da f eine Submersion ist $m := \dim(M) \geq \dim(N) =: n$. Es sei $f(x) =: y$. Nach dem Rangsatz gibt es Karten (U, φ_U) um x und (V, φ_V) um y mit $f(U) = V$ so dass für die Koordinatendarstellung von f gilt:

$$\begin{aligned} \varphi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1} : \varphi_U(U) &\longrightarrow \varphi_V(V) \\ (x_1, \dots, x_m) &\longmapsto (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Daher gibt es eine glatte Abbildung $s : V \longrightarrow U$ mit $f \circ s = \text{id}_V$ (also eine lokale Umkehrung von f). Dann gilt aber lokal

$$g|_V = g \circ f \circ s$$

Da $g \circ f$ nach Voraussetzung glatt war, ist g lokal um y glatt und wegen der Surjektivität von f daher um jedes $y \in N$. Damit ist g insgesamt glatt. □

Definition 7.1.5: (Koordinaten auf Q)

Wir definieren die Abbildungen

$$p_k^Q : Q \longrightarrow \mathbb{R} \\ [(q, p)] \longmapsto p_k \quad \text{für } k \in \{1, \dots, n\}$$

und

$$d_k^Q : Q \longrightarrow \mathbb{R} \\ [(q, p)] \longmapsto q_k - q_{k+1} \quad \text{für } k \in \{1, \dots, n-1\}$$

Da $[(q, p)] = \{(q + \mathbb{R}(1, \dots, 1), p) \in H_1^{-1}(0)\}$ sind die p_k^Q offenbar wohldefiniert und für die d_k^Q berechnen wir:

$$[(q, p)] = [(q', p)] \Rightarrow q - q' = t(1, \dots, 1) \text{ d.h. } q'_i = q_i - t$$

$$\text{Damit: } d_k^Q([(q', p)]) = q'_k - q'_{k+1} = q_k - t - q_{k+1} + t = q_k - q_{k+1} = d_k^Q([(q, p)])$$

also sind auch die d_k^Q wohldefiniert. Da $p_k^Q \circ \pi = p_k$ und $d_k^Q \circ \pi = q_k - q_{k+1}$ sind die p_k^Q und d_k^Q nach Lemma 7.1.4 glatt, da nach Bemerkung 7.1.3 π eine surjektive Submersion ist. Außerdem gilt damit offenbar auch für die p_k^Q Koordinaten die Beziehung

$$\sum_{k=1}^n p_k^Q = 0$$

7.2 $(Q, \Phi^*\Omega, h_{Toda})$ als vollständig integrables Hamiltonsches System

Wir kommen nun zu der zentralen Definition, welche später einen Zusammenhang zwischen dem untersuchten Orbit $\mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#}$ und dem Toda-Lattice herstellen wird.

Definition 7.2.1:

Es sei:

$$\Phi : Q \longrightarrow \mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#} \\ z \longmapsto \left(\iota_{\mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#}} \circ \hat{\Phi} \right) (z)$$

wobei

$$\hat{\Phi} : Q \longrightarrow \mathcal{O}^{\dot{p}} \\ z \longmapsto \begin{pmatrix} p_1^Q(z) & e^{\frac{1}{2}d_1^Q(z)} & & 0 \\ e^{\frac{1}{2}d_1^Q(z)} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & e^{\frac{1}{2}d_{n-1}^Q(z)} \\ 0 & & e^{\frac{1}{2}d_{n-1}^Q(z)} & p_n^Q(z) \end{pmatrix}$$

Die Abbildung $\hat{\Phi}$ ist wohldefiniert da für die Koordinaten in Q die Beziehung $\sum_{k=1}^n p_k^Q = 0$ gilt und die Exponentialfunktion $\exp(t) > 0 \forall t \in \mathbb{R}$ erfüllt, obige Matrix also für beliebiges z stets in $\mathcal{O}^{\dot{p}}$ liegt.

Satz 7.2.2:

Die Abbildung Φ ist ein Diffeomorphismus, insbesondere gilt also

$$\dim(Q) = \dim\left(\mathcal{O}_p^{I_n \mathbb{R}^\#}\right) = 2n - 2$$

Beweis:

Die Gleichung für die Dimension folgt wegen Bemerkung 6.3.15 daraus, dass Φ ein Diffeomorphismus ist. Dazu:

Zunächst ist $\hat{\Phi}$ glatt, da alle zur Definition verwendeten Abbildungen glatt sind. Um eine Umkehrabbildung zu finden, betrachten wir die Abbildung

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \mathcal{O}^{\hat{p}} & \longrightarrow & H_1^{-1}(0) \\ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & 0 \\ b_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} & \longmapsto & (c_1, \dots, c_n, a_1, \dots, a_n) \end{array} \quad \text{wobei} \quad c_k := -2 \sum_{j=1}^{k-1} \ln(b_j)$$

Da $b_k > 0$ und $\sum_{k=1}^n a_k = 0$ (in $\mathcal{O}^{\hat{p}}$) ist diese Abbildung wohldefiniert. Offenbar ist die Abbildung $\hat{\varphi} := \pi \circ \varphi \circ \iota_{\mathcal{O}^{\hat{p}}}^{\mathcal{O}^{\mathbb{R}^{\#}}}$: $\mathcal{O}^{\mathbb{R}^{\#}} \rightarrow Q$ glatt. Wir rechnen nach, dass $\hat{\varphi} = \Phi^{-1}$. Da $\iota_{\mathcal{O}^{\hat{p}}}^{\mathcal{O}^{\mathbb{R}^{\#}}}$ ein Isomorphismus also bijektiv ist, genügt es zu zeigen, dass $\hat{\Phi} \circ \pi \circ \varphi = \text{id}_{\mathcal{O}^{\hat{p}}}$ und $\pi \circ \varphi \circ \hat{\Phi} = \text{id}_Q$ gilt. Sei

$$A := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & 0 \\ b_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{O}^{\hat{p}}$$

so berechnet man:

$$\begin{aligned} \left(\hat{\Phi} \circ \pi \circ \varphi(A) \right)_{k,k} &= p_k^Q(\pi \circ \varphi(A)) = a_k \\ \left(\hat{\Phi} \circ \pi \circ \varphi(A) \right)_{k,k+1} &= \exp \left(\frac{1}{2} d_k^Q(\pi \circ \varphi(A)) \right) \\ &= \exp \left(\frac{1}{2} \left(-2 \sum_{j=1}^{k-1} \ln(b_j) \right) - \left(-2 \sum_{j=1}^k \ln(b_j) \right) \right) \\ &= \exp \left(-\sum_{j=1}^{k-1} \ln(b_j) + \sum_{j=1}^k \ln(b_j) \right) = \exp(\ln(b_k)) = b_k \end{aligned}$$

Damit gilt die Identität $\hat{\Phi} \circ \pi \circ \varphi = \text{id}_{\mathcal{O}^{\hat{p}}}$. Zur anderen Identität: Sei $z = [(q, p)] \in Q$. Dann ist

$$\begin{aligned} \left(\pi \circ \varphi \circ \hat{\Phi} \right) \left([(q, p)] \right) &= (\pi \circ \varphi) \left(\begin{pmatrix} p_1^Q(z) & e^{\frac{1}{2} d_1^Q(z)} & & 0 \\ e^{\frac{1}{2} d_1^Q(z)} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & e^{\frac{1}{2} d_{n-1}^Q(z)} \\ 0 & & e^{\frac{1}{2} d_{n-1}^Q(z)} & p_n^Q(z) \end{pmatrix} \right) \\ &= \pi \left((c_1, \dots, c_n, p_1^Q(z), \dots, p_n^Q(z)) \right) \quad \text{wobei} \quad c_k = -2 \sum_{j=1}^{k-1} \ln \left(e^{\frac{1}{2} d_j^Q(z)} \right) \\ &= \pi \left((c_1, \dots, c_n, p_1^Q(z), \dots, p_n^Q(z)) \right) \quad \text{wobei} \quad c_k = -2 \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{2} d_j^Q(z) \\ &= \pi \left((c_1, \dots, c_n, p_1, \dots, p_n) \right) \quad \text{wobei} \quad c_k = -\sum_{j=1}^{k-1} (q_j - q_{j+1}) \\ &= \pi \left((c_1, \dots, c_n, p_1, \dots, p_n) \right) \quad \text{wobei} \quad c_k = -q_1 + q_k \\ &= [(q, p)] \end{aligned}$$

denn $-q_1$ ist eine feste Konstante in den c_k die unter der Restklassenabbildung π gerade wegfällt. Damit ist auch die Identität $\pi \circ \varphi \circ \hat{\Phi} = \text{id}_Q$ gezeigt, also gilt die Behauptung. \square

Satz 7.2.3:

Es ist

$$\Phi^*\Omega \in \Omega^2(Q)$$

eine symplektische Form auf Q , d.h. $(Q, \Phi^*\Omega)$ eine symplektische Mannigfaltigkeit.

Damit wird Φ als Diffeomorphismus automatisch zu einem Symplektomorphismus zwischen $(Q, \Phi^*\Omega)$ und $(\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}^{\#}}, \Omega)$.

Beweis:

Zunächst ist

$$d(\Phi^*\Omega) = \Phi^*(d\Omega) = \Phi^*(0) = 0 \in \Omega^2(Q)$$

Es ist also nur zu zeigen, dass $\Phi^*\Omega$ die Tangentialräume von Q zu symplektischen Vektorräumen macht. Dies wird darauf zurückgeführt, dass Ω eine symplektische Form auf $\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}^{\#}}$ ist. Es sei $z \in Q$ beliebig, $v_1, v_2, v_3 \in T_zQ$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Schiefsymmetrie: } (\Phi^*\Omega)_z(v_1, v_2) &= \Omega_{\Phi(z)}(d_z\Phi(v_1), d_z\Phi(v_2)) = -\Omega_{\Phi(z)}(d_z\Phi(v_2), d_z\Phi(v_1)) \\ &= -(\Phi^*\Omega)_z(v_2, v_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Bilinearität: } (\Phi^*\Omega)_z(\lambda v_1 + \mu v_2, v_3) &= \Omega_{\Phi(z)}(d_z\Phi(\lambda v_1 + \mu v_2), d_z\Phi(v_3)) \\ &= \Omega_{\Phi(z)}(\lambda d_z\Phi(v_1) + \mu d_z\Phi(v_2), d_z\Phi(v_3)) \\ &= \lambda \Omega_{\Phi(z)}(d_z\Phi(v_1), d_z\Phi(v_3)) + \mu \Omega_{\Phi(z)}(d_z\Phi(v_2), d_z\Phi(v_3)) \\ &= \lambda (\Phi^*\Omega)_z(v_1, v_3) + \mu (\Phi^*\Omega)_z(v_2, v_3) \end{aligned}$$

(Damit folgt die Bilinearität aus der Schiefsymmetrie)

Zur Nichtausgeartetheit: Sei $v_1 \in T_zQ \setminus \{0\}$.

$$\Rightarrow d_z\Phi(v_1) \in T_{\Phi(z)}\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}^{\#}} \setminus \{0\} \xrightarrow[\substack{\Omega_{\Phi(z)} \text{ nicht-} \\ \text{ausgeartet}}]{\implies} \exists w_2 \in T_{\Phi(z)}\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}^{\#}} : \Omega_{\Phi(z)}(d_z\Phi(v_1), w_2) \neq 0$$

$$\Rightarrow v_2 := d_{\Phi(z)}\Phi^{-1}(w_2) \in T_{\Phi^{-1}(\Phi(z))}Q = T_zQ$$

Damit ist:

$$\begin{aligned} (\Phi^*\Omega)_z(v_1, v_2) &= \Omega_{\Phi(z)}(d_z\Phi(v_1), d_z\Phi(v_2)) = \Omega_{\Phi(z)}(d_z\Phi(v_1), d_z\Phi(d_{\Phi(z)}\Phi^{-1}(w_2))) \\ &= \Omega_{\Phi(z)}(d_z\Phi(v_1), d_{\Phi^{-1}(\Phi(z))}\Phi(d_{\Phi(z)}\Phi^{-1}(w_2))) \\ &= \Omega_{\Phi(z)}(d_z\Phi(v_1), d_{\Phi(z)}\Phi \circ \Phi^{-1}(w_2)) = \Omega_{\Phi(z)}(d_z\Phi(v_1), w_2) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Also ist $(T_zQ, (\Phi^*\Omega)_z)$ tatsächlich $\forall z \in Q$ ein symplektischer Vektorraum und damit $\Phi^*\Omega$ eine symplektische Form auf Q . \square

Bemerkung 7.2.4: (Die Funktionen h_k)

In Abschnitt 6.5 hatten wir Poisson-kommutierende Funktionen $\bar{H}_k \in C^\infty(\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}^{\#}})$ $k \in \{1, \dots, n\}$ auf der symplektischen Mannigfaltigkeit $(\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}^{\#}}, \Omega)$ konstruiert. Wir besitzen nun den Symplektomorphismus

$$(Q, \Phi^*\Omega) \xrightarrow{\Phi} (\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}^{\#}}, \Omega)$$

der nach Satz 1.5 auch eine Poisson-Abbildung ist. Wir definieren daher

$$\begin{aligned} h_k : Q &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto (\bar{H}_k \circ \Phi)(z) \end{aligned}$$

für $k \in \{1, \dots, n\}$ und erhalten glatte Funktionen $h_k \in C^\infty(Q)$ die in der Poisson-Klammer, die nach Bemerkung 1.4 von der symplektischen Struktur auf Q induziert wird, kommutieren.

Definition 7.2.5: (Die Funktion h_{Toda} auf Q)

Es sei

$$\begin{aligned} h_{Toda} : Q &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(p_k^Q(z) \right)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} e^{d_k^Q(z)} \end{aligned}$$

(Dies ist offenbar eine glatte Funktion). Wir wollen das Hamilton-System

$$(Q, \Phi^* \Omega, h_{Toda})$$

untersuchen. Zunächst jedoch soll eine Rechtfertigung für die Untersuchung gegeben werden:

Satz 7.2.6:

Es gilt

$$h_{Toda} \circ \pi = H_{Toda} \Big|_{H_1^{-1}(0)}$$

Beweis:

Sei $(q, p) \in H_1^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^{2n}$. Dann ist

$$\begin{aligned} (h_{Toda} \circ \pi)((q, p)) &= h_{Toda}([(q, p)]) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(p_k^Q([(q, p)]) \right)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} e^{d_k^Q([(q, p)])} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} p_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} e^{(q_k - q_{k+1})} \\ &= H_{Toda}((q, p)) \end{aligned}$$

□

Dies ist ein erster Hinweis auf einen Zusammenhang zwischen den Hamilton-Systemen $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0, H_{Toda})$ und $(Q, \Phi^* \Omega, h_{Toda})$.

Satz 7.2.7:

Es gilt

$$h_2 = h_{Toda}$$

Beweis:

In Abschnitt 6.5 wurde gezeigt, dass

$$\bar{H}_k(\ell) = \frac{1}{k} \operatorname{tr} \left(\left(\begin{pmatrix} \iota_{\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}^\#}} & \\ & \ell \end{pmatrix} \right)^k \right) \quad \forall \ell \in \mathcal{O}_p^{\mathbb{R}^\#}$$

Damit:

$$\begin{aligned} h_2(z) &= (\bar{H}_2 \circ \Phi)(z) \\ &= \left(\bar{H}_2 \circ \iota_{\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}^\#}} \circ \hat{\Phi} \right)(z) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\left(\begin{pmatrix} \iota_{\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}^\#}} & \\ & \iota_{\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}^\#}} \left(\hat{\Phi}(z) \right) \end{pmatrix} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\left(\hat{\Phi}(z) \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} p_1^Q(z) & e^{\frac{1}{2} d_1^Q(z)} & & 0 \\ e^{\frac{1}{2} d_1^Q(z)} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & e^{\frac{1}{2} d_{n-1}^Q(z)} \\ 0 & & e^{\frac{1}{2} d_{n-1}^Q(z)} & p_n^Q(z) \end{pmatrix} \right)^2 \end{aligned}$$

Diese Matrix sei vorübergehend mit $M(z) =: (m_{i,j}(z))$ bezeichnet. Dann ist:

$$\begin{aligned}
(M(z)^2)_{j,j} &= \sum_{k=1}^n m_{j,k}(z)m_{k,j}(z) = \sum_{k=j-1}^{j+1} m_{j,k}(z)m_{k,j}(z) \\
&= m_{j,j-1}(z)m_{j-1,j}(z) + m_{j,j}(z)m_{j,j}(z) + m_{j,j+1}(z)m_{j+1,j}(z) \\
&= e^{\frac{1}{2}d_{j-1}^Q(z)}e^{\frac{1}{2}d_{j-1}^Q(z)} + p_j^Q(z)p_j^Q(z) + e^{\frac{1}{2}d_j^Q(z)}e^{\frac{1}{2}d_j^Q(z)} \\
&= \left(e^{\frac{1}{2}d_{j-1}^Q(z)}\right)^2 + \left(p_j^Q(z)\right)^2 + \left(e^{\frac{1}{2}d_j^Q(z)}\right)^2 \\
&= \left(p_j^Q(z)\right)^2 + e^{d_{j-1}^Q(z)} + e^{d_j^Q(z)} \\
&\quad \text{für } j \in \{2, \dots, n-1\} \\
(M(z)^2)_{1,1} &= \sum_{k=1}^n m_{1,k}(z)m_{k,1}(z) = m_{1,1}(z)m_{1,1}(z) + m_{1,2}(z)m_{2,1}(z) \\
&= p_1^Q(z)p_1^Q(z) + e^{\frac{1}{2}d_1^Q(z)}e^{\frac{1}{2}d_1^Q(z)} = \left(p_1^Q(z)\right)^2 + \left(e^{\frac{1}{2}d_1^Q(z)}\right)^2 \\
&= \left(p_1^Q(z)\right)^2 + e^{d_1^Q(z)} \\
(M(z)^2)_{n,n} &= \sum_{k=1}^n m_{n,k}(z)m_{k,n}(z) = m_{n,n-1}(z)m_{n-1,n}(z) + m_{n,n}(z)m_{n,n}(z) \\
&= e^{\frac{1}{2}d_{n-1}^Q(z)}e^{\frac{1}{2}d_{n-1}^Q(z)} + p_n^Q(z)p_n^Q(z) = \left(e^{\frac{1}{2}d_{n-1}^Q(z)}\right)^2 + \left(p_n^Q(z)\right)^2 \\
&= e^{d_{n-1}^Q(z)} + \left(p_n^Q(z)\right)^2
\end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned}
h_2(z) &= \frac{1}{2}\text{tr}\left(M(z)^2\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \left(M(z)^2\right)_{k,k} \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(p_1^Q(z)\right)^2 + e^{d_1^Q(z)} + \sum_{k=2}^{n-1}\left(\left(p_k^Q(z)\right)^2 + e^{d_{k-1}^Q(z)} + e^{d_k^Q(z)}\right) + e^{d_{n-1}^Q(z)} + \left(p_n^Q(z)\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^n \left(p_k^Q(z)\right)^2 + e^{d_1^Q(z)} + \sum_{k=2}^{n-1}\left(e^{d_{k-1}^Q(z)} + e^{d_k^Q(z)}\right) + e^{d_{n-1}^Q(z)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}\left(p_k^Q(z)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(e^{d_1^Q(z)} + e^{d_{n-1}^Q(z)} + \sum_{k=2}^{n-1}e^{d_{k-1}^Q(z)} + \sum_{k=2}^{n-1}e^{d_k^Q(z)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}\left(p_k^Q(z)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(e^{d_1^Q(z)} + e^{d_{n-1}^Q(z)} + \sum_{k=1}^{n-2}e^{d_k^Q(z)} + \sum_{k=2}^{n-1}e^{d_k^Q(z)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}\left(p_k^Q(z)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}e^{d_k^Q(z)} + \sum_{k=1}^{n-1}e^{d_k^Q(z)}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}\left(p_k^Q(z)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(2\sum_{k=1}^{n-1}e^{d_k^Q(z)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}\left(p_k^Q(z)\right)^2 + \sum_{k=1}^{n-1}e^{d_k^Q(z)} \\
&= h_{Toda}(z)
\end{aligned}$$

□

Wir haben also $n-1$ Funktionen $h_k \in C^\infty(Q)$ $k \in \{2, \dots, n\}$ gefunden, die in der Poisson-Klammer auf diesem Raum kommutieren und es ist $h_2 = h_{Toda}$. Wir hatten anfangs besprochen, auf den Nachweis der linearen Unabhängigkeit der Differentiale von den Funktionen h_k zu verzichten und haben damit also bewiesen:

Theorem 7.2.8:

Das Hamilton-System $(Q, \Phi^*\Omega, h_{Toda})$ ist vollständig integrabel.

7.3 Das Toda-Lattice $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0, H_{Toda})$

Theorem 7.2.8 ist unser Hauptresultat. Wie anfangs erwähnt wurde, sind unsere Rechnungen zu schwach um die vollständige Integrabilität von $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0, H_{Toda})$ zu beweisen. Wir wollen dafür in diesem Abschnitt einen Zusammenhang zwischen den Hamilton-Systemen $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0, H_{Toda})$ und $(Q, \Phi^*\Omega, h_{Toda})$ herleiten, der uns helfen wird, unsere Situation genauer zu verstehen und uns zeigen wird, dass wir die bislang unbekannte symplektische

Form $\Phi^*\Omega$ auf Q bereits kennen. Wir hatten mit Satz 7.2.6 bereits gezeigt, dass

$$h_{Toda} \circ \pi = H_{Toda} \Big|_{H_1^{-1}(0)}$$

gilt.

Satz 7.3.1: ($\Phi^*\Omega$ auf der Hyperebene $H_1^{-1}(0)$)

Es ist

$$\pi^*(\Phi^*\Omega) = (\Phi \circ \pi)^*\Omega = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^k (dq_k - dq_{k+1}) \wedge dp_l \right) \in \Omega^2(H_1^{-1}(0))$$

(wobei q_k, p_k die Koordinaten auf $H_1^{-1}(0)$ bezeichnen)

Beweis:

In den Koordinaten von $\mathcal{O}_p^{l_n \mathbb{R}^\#}$ war Ω gegeben durch (vgl. Definition 6.4.7 und Satz 6.4.8):

$$\Omega = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^k \frac{db_k}{b_k} \wedge da_l$$

Zunächst gilt $\frac{db_k}{b_k} = d(\log \circ b_k)$ ("Logarithmische Ableitung") auch im Differentialformenkalkül. Dazu: Wir hatten db_k als Differentialform aus $\Omega^1(\mathcal{O}_p^{l_n \mathbb{R}^\#})$ aufgefasst und nicht als Differential der glatten Abbildung b_k welches üblicherweise mit dem gleichen Symbol bezeichnet wird. Für diesen Beweis wollen wir die Differentiale (im Mannigfaltigkeitssinn) von glatten Abbildungen mit Df bezeichnen um Verwechslungen zu vermeiden. Dann ist also für $\ell \in \mathcal{O}_p^{l_n \mathbb{R}^\#}$:

$$d_\ell b_k = \iota_{\mathbb{R}}^{T_{b_k(\ell)} \mathbb{R}} \circ D_\ell b_k$$

(vgl. Lemma 3.1). Außerdem ist

$$d_\ell(\log \circ b_k) = \iota_{\mathbb{R}}^{T_{\log(b_k(\ell))} \mathbb{R}} \circ D_\ell(\log \circ b_k) = \iota_{\mathbb{R}}^{T_{\log(b_k(\ell))} \mathbb{R}} \circ D_{b_k(\ell)}(\log) \circ D_\ell(b_k)$$

Aus Satz 3.2 folgt, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} T_\ell \mathcal{O}_p^{l_n \mathbb{R}^\#} & \xrightarrow{D_\ell b_k} & T_{b_k(\ell)} \mathbb{R} & \xrightarrow{D_{b_k(\ell)} \log} & T_{\log(b_k(\ell))} \mathbb{R} \\ & & \downarrow \iota_{\mathbb{R}}^{T_{b_k(\ell)} \mathbb{R}} & & \downarrow \iota_{\mathbb{R}}^{T_{\log(b_k(\ell))} \mathbb{R}} \\ & & \mathbb{R} & \xrightarrow{\log'(b_k(\ell))} & \mathbb{R} \end{array}$$

Damit:

$$\begin{aligned} d_\ell(\log \circ b_k) &= \iota_{\mathbb{R}}^{T_{\log(b_k(\ell))} \mathbb{R}} \circ D_{b_k(\ell)}(\log) \circ D_\ell(b_k) \\ &\stackrel{\text{Diagramm}}{=} \log'(b_k(\ell)) \circ \underbrace{\iota_{\mathbb{R}}^{T_{b_k(\ell)} \mathbb{R}} \circ D_\ell b_k}_{=d_\ell b_k} \\ &= \log'(b_k(\ell)) d_\ell b_k \\ &= \frac{d_\ell b_k}{b_k(\ell)} \end{aligned}$$

Also ist $\frac{db_k}{b_k} = d(\log \circ b_k)$ nachgewiesen.

Damit:

$$\begin{aligned}
(\Phi \circ \pi)^* \Omega &= (\Phi \circ \pi)^* \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^k \frac{db_k}{b_k} \wedge da_l \right) = (\Phi \circ \pi)^* \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^k d(\log \circ b_k) \wedge da_l \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^k (\Phi \circ \pi)^* (d(\log \circ b_k) \wedge da_l) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^k ((\Phi \circ \pi)^* d(\log \circ b_k)) \wedge ((\Phi \circ \pi)^* da_l) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^k (d(\Phi \circ \pi)^*(\log \circ b_k)) \wedge (d(\Phi \circ \pi)^* a_l) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^k d \left(\log \circ \underbrace{b_k \circ \Phi \circ \pi}_{=\exp(\frac{1}{2}(q_k - q_{k+1}))} \right) \wedge d \left(\underbrace{a_l \circ \Phi \circ \pi}_{=p_l} \right) \quad (q_k, p_l \text{ Koordinaten auf } H_1^{-1}(0)) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^k d(\log(\exp(\frac{1}{2}(q_k - q_{k+1})))) \wedge dp_l = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^k d(\frac{1}{2}(q_k - q_{k+1})) \wedge dp_l \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^k \frac{1}{2} (dq_k - dq_{k+1}) \wedge dp_l \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^k (dq_k - dq_{k+1}) \wedge dp_l
\end{aligned}$$

□

Der folgende Satz zeigt, dass diese 2-Form auf der Hyperebene $H_1^{-1}(0)$ im wesentlichen die symplektische Standardform ist.

Satz 7.3.2:

Für die Inklusion

$$H_1^{-1}(0) \xrightarrow{j} \mathbb{R}^{2n}$$

gilt:

$$j^* \omega_0 = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^k (dq_k - dq_{k+1}) \wedge dp_l$$

(wobei q_k, p_k die Koordinaten auf $H_1^{-1}(0)$ bezeichnen)

Beweis:

Die symplektische Standardform ω_0 ist definiert durch (in den Koordinaten von \mathbb{R}^{2n})

$$\omega_0 = \sum_{k=1}^n dq_k \wedge dp_k$$

Damit:

$$\begin{aligned}
j^* \omega_0 &= j^* \left(\sum_{k=1}^n dq_k \wedge dp_k \right) = \sum_{k=1}^n j^* (dq_k \wedge dp_k) = \sum_{k=1}^n (j^* dq_k) \wedge (j^* dp_k) \\
&= \sum_{k=1}^n dj^* q_k \wedge dj^* p_k = \sum_{k=1}^n d(q_k \circ j) \wedge d(p_k \circ j) \\
&= \sum_{k=1}^n dq_k \wedge dp_k \quad (\text{jetzt in den Koordinaten auf } H_1^{-1}(0)) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} dq_k \wedge dp_k + dq_n \wedge dp_n = \sum_{k=1}^{n-1} dq_k \wedge dp_k + dq_n \wedge d \left(- \sum_{k=1}^{n-1} p_k \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} dq_k \wedge dp_k - \sum_{k=1}^{n-1} dq_n \wedge dp_k = \sum_{k=1}^{n-1} (dq_k \wedge dp_k - dq_n \wedge dp_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} ((dq_k - dq_n) \wedge dp_k)
\end{aligned}$$

Andererseits:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^k (dq_k - dq_{k+1}) \wedge dp_l &= \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{k=l}^{n-1} (dq_k - dq_{k+1}) \wedge dp_l = \sum_{l=1}^{n-1} \left(\sum_{k=l}^{n-1} (dq_k - dq_{k+1}) \right) \wedge dp_l \\ &= \sum_{l=1}^{n-1} (dq_l - dq_n) \wedge dp_l \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} j^* \omega_0 &= \sum_{k=1}^{n-1} ((dq_k - dq_n) \wedge dp_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^k (dq_k - dq_{k+1}) \wedge dp_l \end{aligned}$$

□

Lemma 7.3.3:

Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und $f, g \in C^\infty(M)$ zwei Funktionen mit

$$\{f, g\}_{(M, \omega)} = 0$$

dann gilt $\forall c \in \mathbb{R}^*$

$$\{f, g\}_{(M, c\omega)} = 0$$

(offenbar ist $c\omega$ ebenfalls eine symplektische Form auf M)

Die Eigenschaft "Poisson-kommutierend" von Funktionen ist also invariant unter Übergang zu einem skalaren Vielfachen der symplektischen Form.

Beweis:

Mit Bemerkung 1.4: $\{f, g\}_{(M, \omega)} = \omega(X_f, X_g) = 0 = c \cdot 0 = c\omega(X_f, X_g) = \{f, g\}_{(M, c\omega)}$

□

Bemerkung 7.3.4:

Wir haben gezeigt, dass

$$\pi^* (\Phi^* \Omega) = \frac{1}{2} j^* \omega_0$$

d.h. die symplektische Form unseres als vollständig integrabel erkannten Hamilton-Systems $(Q, \Phi^* \Omega, h_{Toda})$ entspricht mit π auf die Hyperebene $H_1^{-1}(0)$ gezogen dort im wesentlichen der symplektischen Standardform (in den für vollständige Integrabilität relevanten Eigenschaften). Andererseits haben wir mit Satz 7.2.6 bereits gezeigt, dass

$$\pi^* h_{Toda} = h_{Toda} \circ \pi = H_{Toda} \Big|_{H_1^{-1}(0)}$$

d.h. die Hamilton-Funktion von $(Q, \Phi^* \Omega, h_{Toda})$ entspricht mit π auf die Hyperebene $H_1^{-1}(0)$ gezogen dort der Hamilton-Funktion des Toda-Lattice. Es liegt die Interpretation nahe, dass das Hamilton-System $(Q, \Phi^* \Omega, h_{Toda})$ im wesentlichen das Verhalten des Toda-Lattice auf der Hyperebene $H_1^{-1}(0)$, also für Gesamtimpuls 0 wieder spiegelt, denn beim Übergang zum Quotienten Q hatten wir zusätzlich nur nach den Translationen ausgeteilt und H_{Toda} ist translationsinvariant - das ist gerade der Inhalt der Aussage $\pi^* h_{Toda} = H_{Toda} \Big|_{H_1^{-1}(0)}$.

Um dies zu stützen müssen wir die Funktionen H_k kennen, welche die vollständige Integrabilität des Toda-Lattice sichern. Man kann zeigen, dass diese Funktionen H_k gegeben werden durch

$$H_k : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(q, p) \longmapsto \frac{1}{k} \text{tr} \left(\left(\begin{pmatrix} p_1 & e^{\frac{1}{2}(q_1 - q_2)} & & 0 \\ e^{\frac{1}{2}(q_1 - q_2)} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & e^{\frac{1}{2}(q_{n-1} - q_n)} \\ 0 & & e^{\frac{1}{2}(q_{n-1} - q_n)} & p_n \end{pmatrix} \right)^k \right) \quad k \in \{1, \dots, n\}$$

(vgl. [4], Beispiel 7.2.8). Man berechnet (analog zum Beweis von Satz 7.2.7) $H_2 = H_{Toda}$ und H_1 stimmt offenbar mit dem von uns verwendeten H_1 (Gesamtimpuls) überein. Außerdem berechnet man:

$$\begin{aligned}
\pi^* h_k((q, p)) &= (h_k \circ \pi)((q, p)) = (\bar{H}_k \circ \Phi \circ \pi)((q, p)) = \frac{1}{k} \operatorname{tr} \left(\left(\iota_{\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}^\#}}^{\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}^\#}} (\Phi(\pi((q, p)))) \right)^k \right) \\
&= \frac{1}{k} \operatorname{tr} \left(\left(\iota_{\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}^\#}}^{\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}^\#}} \left(\iota_{\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}^\#}}^{\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}^\#}} \circ \hat{\Phi}(\pi((q, p))) \right) \right)^k \right) = \frac{1}{k} \operatorname{tr} \left(\hat{\Phi}(\pi((q, p)))^k \right) \\
&= \frac{1}{k} \operatorname{tr} \left(\begin{pmatrix} p_1 & e^{\frac{1}{2}(q_1 - q_2)} & & 0 \\ e^{\frac{1}{2}(q_1 - q_2)} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & e^{\frac{1}{2}(q_{n-1} - q_n)} \\ 0 & & e^{\frac{1}{2}(q_{n-1} - q_n)} & p_n \end{pmatrix} \right)^k \\
&= H_k((q, p)) \quad \text{für } k \in \{2, \dots, n\}
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt:

$$\pi^* h_k = H_k \Big|_{H_1^{-1}(0)} \quad \text{für } k \in \{2, \dots, n\}$$

Also sehen wir (mit der Kenntniss der genauen Gestalt der Funktionen H_k des Toda-Lattice!), dass die Funktionen h_k , die die vollständige Integrabilität von $(Q, \Phi^* \Omega, h_{Toda})$ sicherstellen, mit π auf die Hyperebene $H_1^{-1}(0)$ gezogen dort aussehen wie die entsprechenden Funktionen des Toda-Lattice.

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir noch (heuristisch) ein wenig mehr Anschauung über unsere Situation gewinnen. Man kann beweisen:

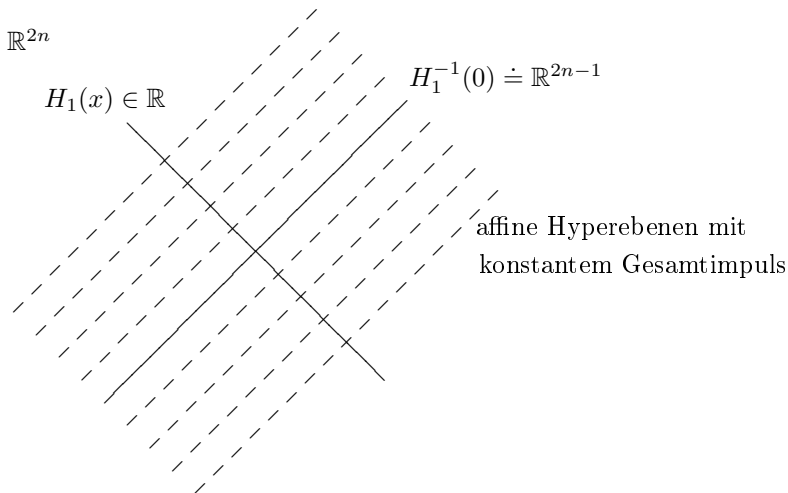
Satz:

Sei (M, ω, H) ein Hamilton-System und $f \in C^\infty(M)$. Dann:

$$\{f, H\}_M = 0 \iff X_H(f) = 0 \quad (\text{Lie-Ableitung})$$

d.h. $\{f, H\}_M = 0$ genau dann, wenn f entlang aller Integralkurven von X_H konstant ist.

Die Integralkurven von X_H sind gerade alle möglichen Bewegungen im zugehörigen Hamilton-System (M, ω, H) . Der Impulserhaltungssatz, der für das Toda-Lattice anwendbar ist, garantiert, dass der Gesamtimpuls H_1 entlang aller Integralkurven von H_{Toda} konstant ist. Jede einzelne Integralkurve von $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0, H_{Toda})$ verläuft also vollständig in einer der affinen Hyperebenen $\{x + H_1^{-1}(0) \mid x \in \mathbb{R}^{2n}\}$.



Wir haben festgestellt, dass wir durch das Hochziehen unserer Lösung auf die Hyperebene $H_1^{-1}(0)$ gerade den dort befindlichen Ausschnitt aus der Lösung für das Toda-Lattice sehen. Das Problem unserer Rechnung besteht also darin, dass der konstruierte Orbit $\mathcal{O}_p^{\mathbb{R}^\#}$ eine zu geringe Dimension $(2n - 2)$ besitzt. Diese Eigenschaft

spiegelt letztlich wieder, dass wir zur Konstruktion die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$ benutzt haben, welche die Bedingung $\text{tr}(B) = 0$ stellte. Unter Verwendung anderer Lie-Algebren ohne diese Forderung und stärkerer Sätze während der Konstruktion der Räume kann man jedoch mit einem unserem ähnlichen Vorgehen die vollständige Integrität des Toda-Lattice beweisen.

Wir fassen die durchgeführten Konstruktionen noch einmal übersichtlich zusammen:

$$\begin{array}{ccccccc}
H_1^{-1}(0) & \xrightarrow[\text{Inklusion}]{j} & \mathbb{R}^{2n} & & & & \\
\downarrow \pi & & & & & & \\
Q & \xrightarrow[\text{symplektomorph}]{\Phi} & \mathcal{O}_p^{\mathfrak{sl}_n\mathbb{R}\#} & \xrightarrow[\text{Inklusion}]{\chi} & \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}\# & \xrightarrow[\text{Einbettung}]{\Psi} & \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}\#
\end{array}$$

Symplektische Mannigfaltigkeiten Poisson-Mannigfaltigkeiten

7.4 Explizite Berechnung von h_3 und H_3

Abschließend sollen die Funktionen H_3 (und damit auch h_3) explizit berechnet werden. Es war

$$H_3 : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(q, p) \longmapsto \frac{1}{3} \text{tr} \left(\begin{pmatrix} p_1 & e^{\frac{1}{2}(q_1-q_2)} & & & 0 \\ e^{\frac{1}{2}(q_1-q_2)} & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & e^{\frac{1}{2}(q_{n-1}-q_n)} \\ 0 & & & e^{\frac{1}{2}(q_{n-1}-q_n)} & p_n \end{pmatrix}^3 \right)$$

Die Matrix sei vorübergehend mit L bezeichnet. Wegen $(L^k)^t = (L^t)^k = L^k$ genügt es jeweils das obere Dreieck zu berechnen. Man berechnet (es werden nur Zwischenergebnisse angegeben):

$$\begin{aligned}
(L^2)_{i,j} &= 0 \quad \text{für } j > i + 2 \\
(L^2)_{i,i} &= \begin{cases} p_1^2 + e^{(q_1-q_2)} & i = 1 \\ p_i^2 + e^{(q_{i-1}-q_i)} + e^{(q_i-q_{i+1})} & i \in \{2, \dots, n-1\} \\ p_n^2 + e^{(q_{n-1}-q_n)} & i = n \end{cases} \\
(L^2)_{i,i+1} &= (p_i + p_{i+1})e^{\frac{1}{2}(q_i-q_{i+1})} \\
(L^2)_{i,i+2} &= e^{\frac{1}{2}(q_i-q_{i+2})}
\end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned}
(L^3)_{i,i} &= \sum_{k=1}^n (L^2)_{i,k} L_{k,i} = \sum_{k=i-1}^{i+1} (L^2)_{i,k} L_{k,i} \\
&= p_i^3 + 2p_i e^{(q_{i-1}-q_i)} + p_{i-1} e^{(q_{i-1}-q_i)} + 2p_i e^{(q_i-q_{i+1})} + p_{i+1} e^{(q_i-q_{i+1})} \\
&\quad \text{für } i \in \{2, \dots, n-1\} \\
(L^3)_{1,1} &= p_1^3 + 2p_1 e^{(q_1-q_2)} + p_2 e^{(q_1-q_2)} \\
(L^3)_{n,n} &= p_n^3 + 2p_n e^{(q_{n-1}-q_n)} + p_{n-1} e^{(q_{n-1}-q_n)}
\end{aligned}$$

Für die Spur von L^3 berechnet man nun:

$$\text{tr}(L^3) = \sum_{k=1}^n p_k^3 + 3 \sum_{k=1}^{n-1} (p_k + p_{k+1}) e^{(q_k-q_{k+1})}$$

Damit erhalten wir für H_3 bzw. h_3 :

$$H_3((q, p)) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} p_k^3 + \sum_{k=1}^{n-1} (p_k + p_{k+1}) e^{(q_k - q_{k+1})}$$
$$h_3(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \left(p_k^Q(z) \right)^3 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left(p_k^Q(z) \right) + \left(p_{k+1}^Q(z) \right) \right) e^{d_k^Q(z)}$$

Literatur

- [1] Stefan Waldmann *Poisson-Geometrie und Deformationsquantisierung* Springer-Verlag 2007
- [2] Victor Guillemin, Shlomo Sternberg *Symplectic techniques in physics* Cambridge University Press 1996
- [3] Ilka Agricola, Thomas Friedrich *Globale Analysis* Vieweg-Verlag 2001 1. Auflage
- [4] Norman E. Hurt *Geometric Quantization in Action* D. Reidel Publishing Company 1983