

1. Übungsblatt zur Wavelet-Analyse

Organisatorisches

Die Übung findet freitags, 16.00 - 17.00 Uhr im SR II, statt. Jede dritte Übung wird als zusätzlicher Vorlesungstermin verwendet werden. Der Zyklus beginnt am 27.10. mit einer zusätzlichen Vorlesung.

Aufgabe 1: Fourier-Transformation von Faltungen

Zeige Lemma 2.2 der Vorlesung: Seien $f, g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ und

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy.$$

Dann gilt

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}.$$

Aufgabe 2: Fourier-Transformation und Ableitungen

Zeige: Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\begin{aligned}(D^m f)^\wedge(\xi) &= \xi^m \hat{f}(\xi), \quad m \in \mathbb{N}^d, \xi \in \mathbb{R}^d, \\ D^m \hat{f}(\xi) &= (-1)^{|m|} (x^m f(x))^\wedge(\xi), \quad m \in \mathbb{N}^d, \xi \in \mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Satz von Plancherel

Zeige: $\mathcal{F}, \mathcal{F}^*$ besitzen eindeutige Fortsetzungen F, F^* auf $L_2(\mathbb{R}^d)$ derart, dass gilt $F^{-1} = F^*$ und

$$(2\pi)^d \langle g, f \rangle = \langle \hat{g}, \hat{f} \rangle, \quad g, f \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Präsentation der Lösungen: 3.11.2006