Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Stephan Dahlke WS 2006/07

2. Übungsblatt zur Wavelet-Analysis

Aufgabe 4: Fourier-Transformation

Sei $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Zeige

(i) $\hat{f}(\cdot - b)(\xi) = e^{-i\xi \cdot b}\hat{f}(\xi), \quad b \in \mathbb{R}^d,$

(ii) $\hat{f}(M\cdot)(\xi) = \dfrac{1}{|\det M|}\hat{f}(M^{-T}\xi), \quad M \in GL(d, \mathbb{R}).$

Aufgabe 5: Box-Splines

Zeige Satz 3.1.8 der Vorlesung.
Hinweis: Man leite zunächst mittels vollständiger Induktion nach μ die Funktionalgleichung

$$\int_{[X_\mu]} B(u|X_\mu) f(u)du = \int_{[0,1]^\mu} f(X_\mu t)dt, \quad f \in C([X_\mu])$$

her. Damit berechne man die Fourier-Transformierte von $B(u|X_\mu)$ und hieraus schließlich das Symbol $a(z)$.

Aufgabe 6: Multiresolution Analysis *„zu Fuß"*

Man zeige: Der kardinale B-Spline $N_K := \underbrace{1_{[0,1)} * \cdots * 1_{[0,1)}}_{K-\text{mal}}$ ist Generator einer dyadischen Multiresolution Analysis des $L_2(\mathbb{R})$.
Hinweis: Benutze etwa (3.1.21), (3.1.23), (3.1.24), (3.1.25) und die Tatsache, daß

$$C_0(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \text{supp} f \text{ kompakt}\}$$

dicht in $L_2(\mathbb{R})$ liegt.

Aufgabe 7: Zeige Bemerkung 3.2.2 der Vorlesung:

(i) $\mathcal{L}_p \subset L_p, \quad 1 \le p \le \infty,$

(ii) $\mathcal{L}_p \subset \mathcal{L}_q, \quad 1 \le q < p \le \infty,$

(iii) $\phi \in \mathcal{E}_p \Longrightarrow \phi \in \mathcal{L}_p, \quad 1 \le p \le \infty,$

(iv) $|\phi(x)| \le c(1 + |x|)^{-d-\delta} \; \forall x \in \mathbb{R}^d \Longrightarrow \phi \in \mathcal{L}_\infty.$

Präsentation der Lösungen: 24.11.2006