Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Stephan Dahlke

WS 2006/07

3. Übungsblatt zur Wavelet-Analysis

Aufgabe 8:

Zeige Satz 3.2.5 der Vorlesung:

(i) Für $f, g \in L_2$ gilt

$\|c(f,g)\|_{\ell_1} \leq |f|_2 |g|_2$,

(ii) Für $f \in L_p$, $g \in \mathcal{L}_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt

$\|c(f,g)\|_{\ell_p} \leq \|f\|_p |g|_q$, $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Hinweis zu (ii): Benutze die inverse Hölder-Ungleichung:
Ist $M(a) := \sup\{|\langle a, b\rangle|, \text{supp } b \text{ endlich}, \|b\|_{\ell_p} = 1\} < \infty$,
dann gilt $a \in \ell_q$ und $\|a\|_{\ell_q} = M(a)$.

Aufgabe 9:

Zeige, dass für $\phi, \varphi \in \mathcal{L}_2$ und $a, b \in \ell_1$ gilt

$$[\phi *' a, \varphi *' b](z) = a(z)[\phi, \varphi](z)\overline{b(z)}\,.$$

Aufgabe 10: Spline-Wavelet

Konstruiere ein orthonormales Spline-Wavelet ψ zum kardinalen B-Spline N_2. Aus Gründen der Berechenbarkeit darfst Du Dich dabei auf die Bestimmung der Fourier-Transformierten des Wavelets beschränken.
Wähle dazu folgende Vorgehensweise:

1) Wähle zur Vereinfachung der Rechnungen die ℓ_2-stabile, verfeinerbare Funktion $\tilde{N}_2(x) := N_2(x+1)$ und berechne $\hat{\tilde{N}}_2(\xi)$.

2) Konstruiere einen zugehörigen Generator φ mit orthogonalen Translaten mittels

$$\frac{\hat{\tilde{N}}_2(\xi)}{\left(\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \left|\hat{\tilde{N}}_2(\xi + 2\pi k)\right|^2\right)^{1/2}} =: \hat{\varphi}(\xi)\,, \text{ vergleiche Theorem 3.2.10.}$$

Hinweis: Zur Bestimmung von $\hat{\varphi}$ muss die Reihe $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\xi + 2\pi k)^4}$ berechnet werden.

Hierzu zeige man zunächst

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\xi + 2\pi k)^2} = \frac{1}{4}\sin^{-2}\left(\frac{\xi}{2}\right) \qquad (*)$$

bitte wenden!

und differenziere. Zum Beweis von $(*)$ verwende man, dass $\langle \tilde{N}_1(\cdot), \tilde{N}_1(\cdot - k)\rangle = \delta_{0,k}$ für $\tilde{N}_1(x) := N_1(x + \frac{1}{2})$ und daher wegen Korollar 3.2.12 $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\tilde{N}}_1(\xi + 2\pi k)\right|^2 = 1$.

3) Bestimme das zu φ gehörige Symbol $a(z)$ mit Hilfe der Gleichung

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{2} a(z) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

4) Bestimme $b(z)$ entsprechend (4.1.2) und damit $\hat{\psi}$.

Präsentation der Lösungen: 15.12.2006