Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Stephan Dahlke

WS 2006/07

4. Übungsblatt zur Wavelet-Analysis

Aufgabe 11: Riesz-Lemma

Beweise das Riesz-Lemma: Ist A ein positives, trigonometrisches Polynom vom Grad L mit

$$A(\xi) = \sum_{j=0}^{L} a_j \cos(j\xi), \quad a_j \in \mathbb{R}\,,$$

dann existiert ein Polynom B mit

$$B(\xi) = \sum_{j=0}^{L} b_j e^{ij\xi}, \quad b_j \in \mathbb{R}\,,$$

so dass $A(\xi) = |B(\xi)|^2$.

Hinweis: Zeige zunächst, dass $A(\xi)$ dargestellt werden kann als $A(\xi) = e^{iL\xi} P_A(z)$, wobei

$$P_A(z) := \alpha \prod_{j=1}^{L} \left(\frac{1}{2} - d_j z + \frac{1}{2} z^2 \right), \ \alpha \in \mathbb{R}\,,\ z := e^{-i\xi}$$

für gewisse $d_j \in \mathbb{C}$. Hierzu überlege man sich zunächst, dass $A(\xi) = q_A(\cos(\xi))$, wobei q_A ein Polynom vom Grad L mit reellen Koeffizienten ist, und man verwende, dass $\cos(j\xi) = \frac{e^{ij\xi}+e^{-ij\xi}}{2}$ gilt.
Faktorisiere dann P_A gemäß des Fundamentalsatzes der Algebra bezüglich seiner Nullstellen und verwende, dass für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $z = e^{-i\xi}$ gilt:

$$|(z - z_0)(z - \bar{z}_0^{-1})| = |z_0|^{-1} |e^{-i\xi} - z_0|^2.$$

Aufgabe 12: Bernstein-Basis-Polynome

(i) Zeige Aussage (4.2.13) der Vorlesung: Für $P_M(y)$ definiert durch

$$P_M(y) = \sum_{j=0}^{M-1} m_j B_j^{M-1}(y) \quad \text{wobei} \quad B_j^{M-1}(y) := \binom{M-1}{j} y^j (1-y)^{M-1-j}$$

gilt

$$\frac{d}{dy} P_M(y) = \sum_{j=0}^{M-1} m_j (M-1) \left(B_{j-1}^{M-2}(y) - B_j^{M-2}(y) \right).$$

(ii) Zeige Aussage (4.2.15) der Vorlesung: $c_{M-1} < 1$.

bitte wenden!

Aufgabe 13: Interpolatorische Multiresolution Analysis

Eine stetige Funktion ϕ auf $\mathbb{R}^d$ erfülle

$$\begin{aligned} \phi(k) &= \delta_{0k}\,, \quad k \in \mathbb{Z}^d, && (1)\\ |\phi(x)| &\lesssim (1+|x|)^{-d-\delta} \quad \text{und} \quad |\hat{\phi}(\xi)| \lesssim (1+|\xi|)^{-d-\delta}. && (2) \end{aligned}$$

Zeige folgende Aussagen:

(i) $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \hat{\phi}(\xi + 2\pi k) \equiv 1\,.$

(ii) Ist ϕ außerdem (a, M)-verfeinerbar, $a \in \ell_1(\mathbb{Z}^d)$, dann gilt

$$m = \sum_{\rho\in R^T} a(\zeta_\rho e^{-iM^{-T}\xi}).$$

(iii) Sei $f \in V_0 = \overline{\text{span}\{\phi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}^d\}}$. Dann gilt

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(k)\phi(x-k),$$

und für $f \in V_j$ gilt

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(M^{-j}k)\phi(M^j x - k).$$

(iv) Sei φ^N ein entsprechend Theorem 4.2.1 konstruierter Daubechies-Generator. Dann erfüllt

$$\phi^N(y) := \left(\varphi^N(\cdot) * \varphi^N(-\cdot)\right)(y), \quad y \in \mathbb{R}$$

die Bedingung (1).

Präsentation der Lösungen: Der Termin wird im Tutorium am 15.12.2006 bekannt gegeben.