Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
Stephan Dahlke WS 2006/07

5. Übungsblatt zur Wavelet-Analysis

Aufgabe 14: Interpolatorische Wavelets

Sei ϕ eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$, so dass

$$\phi(k) = \delta_{0k}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \tag{1}$$

$$|\phi(x)| \lesssim (1+|x|)^{-1-\delta} \quad \text{und} \quad |\hat{\phi}(\xi)| \lesssim (1+|\xi|)^{-1-\delta} \tag{2}$$

gilt. Außerdem sei ϕ $(a,2)$-verfeinerbar, $a \in \ell_1(\mathbb{Z})$, und die zugehörige interpolatorische Multiresolution-Analysis $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ sei definiert durch

$$V_j := \overline{\operatorname{span}\{\phi(2^j\cdot -k), k \in \mathbb{Z}\}}\,, \quad j \in \mathbb{Z}\,.$$

Auf jedem Raum V_{j+1} sei ein Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_{j+1}$ definiert durch

$$(f,g)_{j+1} := 2^{-j-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k2^{-j})\overline{g(k2^{-j})} \quad f,g \in V_{j+1}\,.$$

Mit X_j bezeichnen wir das orthogonale Komplement von V_j in V_{j+1} bezüglich des Skalarprodukts von V_{j+1}, d.h.

$$V_{j+1} = V_j \oplus X_j\,.$$

Zeige: Ist ψ definiert durch

$$\psi(x) := \phi(2x-1) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{\phi\left(-k+\frac{1}{2}\right)}\phi(2x-2k)\,,$$

so ist $\psi \in X_0$, und für jedes $f \in X_0$ gilt

$$f(\ell) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f\left(k+\frac{1}{2}\right)\psi(\ell-k)\,.$$

Hinweis: Zeige zunächst

(i) $\psi\left(\ell+\frac{1}{2}\right) = \delta_{0\ell}\,, \quad \ell \in \mathbb{Z}\,,$

(ii) $\psi(\ell) = -\overline{\phi\left(-\ell+\frac{1}{2}\right)}\,, \quad \ell \in \mathbb{Z}\,.$

Aufgabe 15:

Beweise Lemma 5.2.1.5 der Vorlesung:
Gilt $a(1) = 2$ und für ein $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k||k|^{\varepsilon} < \infty\,,$$

so konvergiert

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{a(e^{-i2^{-j}\xi})}{2}$$

punktweise für alle $\xi \in \mathbb{R}$, und die Konvergenz ist gleichmäßig auf allen kompakten Mengen.

Hinweis: Verwende folgendes Konvergenzkriterium für unendliche Produkte:
Das Produkt $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + f_n(x))$ konvergiert gleichmäßig in einer Menge J und stellt eine dort stetige Funktion dar, wenn die Funktionen $f_n(x)$ in J sämtlich stetig sind und dort die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ gleichmäßig konvergiert.
Verwende außerdem (ohne Beweis):
Für $0 < \delta \leq 1$ existiert eine Konstante c_δ, so dass $|\sin(x)| \leq c_\delta |x|^{\delta}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Präsentation der Lösungen: 09.02.2007