

# Wavelets: Grundlagen und Anwendungen

Stephan Dahlke  
Institut für Geometrie und  
Praktische Mathematik  
RWTH Aachen  
Templergraben 55  
52056 Aachen

## 1 Einleitung: Was sind Wavelets?

Unter **Wavelets** versteht man spezielle Basen des Funktionenraumes  $L_2(\mathbb{R}^d)$ , die durch dyadisches Dilatieren, ganzzahliges Translatieren und geeignetes Skalieren einer endlichen Anzahl von Funktionen  $\{\psi_i\}_{i \in I}$ , den sogenannten **Mother Wavelets**, gewonnen werden. Die Elemente  $\psi_{i,j,k}$  der Basis haben also die Form

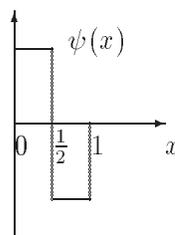
$$\psi_{i,j,k}(\cdot) := 2^{dj/2} \psi_i(2^j \cdot -k), \quad i \in I, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d. \quad (1)$$

Ist eine solche Basis konstruiert, so erhalten wir die sogenannte **Wavelet–Darstellung** einer Funktion  $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$f(x) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_{i,j,k} \psi_{i,j,k}(x) \quad (2)$$

mit geeigneten Koeffizienten  $c_{i,j,k}$ . Warum ist man nun an diesen speziellen Basen interessiert, das heißt, welchen prinzipiellen Vorteil hat die Wavelet–Darstellung gegenüber anderen Entwicklungen, etwa der klassischen Fourier–Entwicklung, die ja einer Zerlegung von Funktionen in die Anteile der Schwingungen bezüglich verschiedener Frequenzen entspricht? Betrachten wir hierzu zunächst den Fall, daß die Mother Wavelets  $\psi_i$  nur innerhalb eines Kubusses  $Q \subset \mathbb{R}^d$  ungleich Null sind. Dann hat die Wavelet–Darstellung gegenüber der Fourier–Entwicklung den Vorteil, daß sie in gewissem Sinne **lokal** ist, das heißt, ein Koeffizient  $c_{i,j,k}$  beschreibt im wesentlichen die Eigenschaften der Funktion  $f$  im Intervall  $2^{-j}(Q+k)$ . Viele in der Praxis wichtige Eigenschaften lassen sich daher aus der Wavelet–Darstellung viel besser ablesen als aus der Fourier–Darstellung, bei der ja kleinste Änderungen des Signals Auswirkungen auf das gesamte Frequenzspektrum haben. Der Bereich  $2^{-j}(Q+k)$  wird mit wachsendem  $j$  offenbar immer kleiner, höhere ‘Skalen’  $j$  entsprechen also der Auflösung immer feinerer Details. Diese Eigenschaft macht Wavelets insbesondere geeignet zur Bildanalyse (Kantenerkennung, Datenkompression), vergl. Abschnitt 5.

Das älteste Beispiel einer Wavelet–Basis (im  $L_2(\mathbb{R})$ ) ist die 1910 konstruierte sogenannte **Haar–Basis**. Hierbei hat das Mother Wavelet die folgende Gestalt:



Offenbar ist dieses Mother Wavelet sehr schön lokalisiert, aber leider nicht sehr glatt (es ist nicht einmal stetig) und daher für viele Zwecke unbrauchbar. Die Konstruktion eines glatten Wavelets gelang erst 1985 Y. Meyer. Sein Wavelet war sogar unendlich oft differenzierbar. 1986 konstruierte dann P.G. Lemarié ein exponentiell abfallendes und hinreichend glattes Mother Wavelet. Den entscheidenden Durchbruch brachten dann 1988 die Arbeiten von I. Daubechies, die sogar glatte Wavelet–Basen mit kompaktem Träger konstruieren konnte. Im Anschluß daran ist dieses neuartige Forschungsfeld regelrecht explodiert, und inzwischen verdoppelt sich die Anzahl der Publikationen auf diesem Gebiet jedes Jahr. Es gibt mittlerweile sogar ein eigenes Wavelet–Journal (Applied and Computational Harmonic Analysis). Eine Auswahl der derzeit erhältlichen Monographien zum Thema Wavelets ist am

Schluß zusammengestellt. Wavelets sind inzwischen in vielen Bereichen erfolgreich angewendet worden, etwa in der Bildanalyse, zur numerischen Behandlung von Operatorgleichungen, in der Astro- und Geophysik, in der Quantenmechanik, der Meteorologie, der Tomographie usw.

Nach diesen einführenden Bemerkungen wollen wir nun eine exakte Definition von Wavelets geben.

**Definition 1.1** *i) Ein System  $\{\psi_i\}_{i \in I}$ ,  $I$  eine endliche Indexmenge,  $\psi_i \in L_2(\mathbb{R}^d)$ , heißt eine Familie von (orthonormalen Mother) Wavelets, falls die Funktionen*

$$\psi_{i,j,k}(x) := 2^{dj/2} \psi_i(2^j x - k), \quad i \in I, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d, \quad (3)$$

eine Orthonormalbasis des  $L_2(\mathbb{R}^d)$  bilden,

$$\langle \psi_{i,j,k}, \psi_{i',j',k'} \rangle = \delta_{i,i'} \delta_{j,j'} \delta_{k,k'}. \quad (4)$$

Das gesamte Funktionensystem

$$\Psi = \{\psi_{i,j,k}, i \in I, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d\} \quad (5)$$

heißt **Wavelet-Basis**.

*ii) Ein Funktionensystem  $\Psi$  der Form (3),(5) heißt Prä-Wavelet-Basis, falls die Orthogonalitätsbedingung (4) nur für Funktionen auf verschiedenen Skalen  $j$  erfüllt ist,*

$$\langle \psi_{i,j,k}, \psi_{i',j',k'} \rangle = 0 \quad \text{für } j \neq j', \quad (6)$$

und auf derselben Skala die Translate der Funktionen  $\{\psi_i\}_{i \in I}$  noch  $\ell_2$ -stabil sind, d.h., es sollen Konstanten  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^+$  existieren mit

$$C_1 \sum_{i \in I, k \in \mathbb{Z}^d} |c_{i,j,k}|^2 \leq \left\| \sum_{i \in I, k \in \mathbb{Z}^d} c_{i,j,k} \psi_{i,j,k} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C_2 \sum_{i \in I, k \in \mathbb{Z}^d} |c_{i,j,k}|^2. \quad (7)$$

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir einige grundlegende Begriffe zusammenfassen, die wir im Folgenden benutzen werden.

$\mathbb{R}^d$ :	d-dimensionaler euklidischer Raum.
$L_2(\mathbb{R}^d)$ :	Raum der quadratintegriblen, meßbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^d$ , $f \in L_2(\mathbb{R}^d) \iff \ f\ _{L_2} := (\int_{\mathbb{R}^d}  f(x) ^2 dx)^{1/2} < \infty$ . $L_2$ ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(x)} dx$ .
$\ell_2(\mathbb{Z}^d)$ :	Raum der quadratsummierbaren Folgen, $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{Z}^d} \in \ell_2(\mathbb{Z}^d) \iff \sum_{n \in \mathbb{Z}^d}  \lambda_n ^2 < \infty$ .
$\hat{f}$ :	Fourier-Transformierte der Funktion $f$ , $\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix\xi} dx$ .
$\text{supp } f$ :	Träger der Funktion $f$ , d.h. Abschluß der Menge $\{x \in \mathbb{R}^d   f(x) \neq 0\}$ .
$\text{span}\{f_l   f_l \in L_2(\mathbb{R}^d), l \in J\}$ :	Abschluß aller endlichen Linearkombinationen der Funktionen $f_l$ im $L_2$ -Sinne.
$\chi_A$ :	charakteristische Funktion von $A \subset \mathbb{R}^d$ , $\chi_A(x) = 1$ für $x \in A$ , 0 sonst.
$H^s(\mathbb{R}^d)$ :	Sobolev-Raum der Ordnung $s$ , damit wird die Menge aller derjenigen Funktionen $f \in L_2$ bezeichnet, die schwache Ableitungen (Ableitungen im Distributionensinne) $\partial^\alpha f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ bis zur Ordnung $s$ haben.

## 2 Notwendige Vorbemerkungen: Ohne die Multiresolution Analysis geht nichts

Das Konzept der Multiresolution Analysis ist das Standard-Hilfsmittel zur Konstruktion von Wavelets. Wir wollen zunächst in Abschnitt 2.1 eine allgemeine Definition angeben und einige Beispiele diskutieren. Danach wollen wir in Abschnitt 2.2. die 'richtigen' Funktionenräume für Wavelet-Analyse einführen und einige weitere hilfreiche Sachverhalte angeben.

## 2.1 Definition und Beispiele

**Definition 2.1** *Unter einer Multiresolution Analysis (abgekürzt M.R.A.) des  $L_2(\mathbb{R}^d)$  versteht man eine Folge  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  von abgeschlossenen Unterräumen des  $L_2(\mathbb{R}^d)$  mit*

$$\cdots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset V_{j+2} \subset \cdots; \quad (8)$$

$$\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j} = L_2(\mathbb{R}^d); \quad (9)$$

$$\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}; \quad (10)$$

$$f(\cdot) \in V_0 \text{ genau dann, wenn } f(\cdot - k) \in V_0, \quad k \in \mathbb{Z}^d; \quad (11)$$

$$f(\cdot) \in V_j \text{ genau dann, wenn } f(2 \cdot) \in V_{j+1}; \quad (12)$$

es existiert eine Funktion  $\varphi \in V_0$  mit

$$V_0 = \overline{\text{span}\{\varphi(\cdot - k) \mid k \in \mathbb{Z}^d\}}, \quad (13)$$

welche darüberhinaus  $\ell_2$ -stabile Translate besitzt, das heißt, es sollen Konstanten  $C_3, C_4 \in \mathbb{R}^+$  existieren mit

$$C_3 \|\lambda\|_{\ell_2(\mathbb{Z}^d)} \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \lambda_k \varphi(\cdot - k) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_4 \|\lambda\|_{\ell_2(\mathbb{Z}^d)}, \quad (14)$$

vergl. (7). Die Funktion  $\varphi$  heißt auch der **Generator** der M.R.A.

**Bemerkung 2.2** Zur Motivation erläutern wir kurz, wie mit Hilfe einer M.R.A. eine Wavelet-Basis konstruiert werden kann. Wegen (8) existiert ein nichttriviales orthogonales Komplement  $W_0$  von  $V_0$  in  $V_1$ , d.h.  $V_1 = V_0 \oplus W_0$ ,  $V_0 \perp W_0$ . Wir suchen eine Familie von Funktionen  $\psi_i, i \in I$ , mit

$$W_0 = \overline{\text{span}\{\psi_i(\cdot - k) \mid k \in \mathbb{Z}^d, i \in I\}}, \quad \langle \psi_i(\cdot), \psi_{i'}(\cdot - k) \rangle = \delta_{i,i'} \delta_{0,k},$$

und setzen

$$W_j := \{f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d) \mid f(2^{-j} \cdot) \in W_0\}.$$

Wegen (12) gilt dann  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ , und man kann zeigen, daß (9) und (10)  $L_2(\mathbb{R}^d) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j$  implizieren. Es folgt also, daß

$$\psi_{i,j,k}(x) = 2^{dj/2} \psi_i(2^j x - k), \quad i \in I, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d,$$

die gesuchte Wavelet-Basis des  $L_2(\mathbb{R}^d)$  ist. Wegen (12) und (13) gilt aber

$$V_j = \overline{\text{span}\{\varphi(2^j \cdot - k) \mid k \in \mathbb{Z}^d\}}, \quad (15)$$

und da jedes  $\psi_i$  in  $V_1$  enthalten ist, besitzt es wegen (15) eine Darstellung

$$\psi_i(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} b_l^i \varphi(2x - l).$$

Die Konstruktion einer Wavelet-Basis reduziert sich also auf die Bestimmung geeigneter Koeffizienten  $\{b_l^i\}_{l \in \mathbb{Z}^d}, i \in I$ . Wie dies konkret zu bewerkstelligen ist, erfahren wir im Abschnitt 3.

**Bemerkung 2.3** Man kann zeigen: wegen (8), (12), (13) und (14) ist der Generator  $\varphi$  eine **verfeinerbare Funktion**, d.h. es gilt mit einer geeigneten Koeffizientenfolge  $\mathbf{a}$

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k \varphi(2x - k), \quad \mathbf{a} = \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d} \in \ell_2(\mathbb{Z}^d). \quad (16)$$

(16) heißt auch **Verfeinerungsgleichung** oder **Zwei-Skalen-Gleichung**. Mittels der Folge  $\mathbf{a}$  definieren wir das **Symbol**

$$a(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k z^k, \quad z \in T^d = \{(z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d : |z_i| = 1, i = 1, \dots, d\}. \quad (17)$$

(Wir benutzen stets die abkürzende Schreibweise  $z^k = z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_d^{k_d}$ .) Wenden wir Fourier-Transformation auf (16) an, so folgt mit  $z = e^{-i\xi} = (e^{-i\xi_1}, \dots, e^{-i\xi_d})$  die wichtige Beziehung

$$\hat{\varphi}(\xi) = 2^{-d} a(e^{-i\xi/2}) \hat{\varphi}(\xi/2). \quad (18)$$

Wegen der zentralen Gleichung (16) wird in der Praxis eine M.R.A. häufig nicht direkt über die Definition geeigneter Unterräume konstruiert. Vielmehr versucht man zunächst, eine brauchbare verfeinerbare Funktion zu finden, von der man dann zeigen muß, daß sie tatsächlich eine Multiresolution Analysis generiert. Das Vorgehen sieht etwa folgendermaßen aus:

- Gegeben  $\mathbf{a} = \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d} \in \ell_2(\mathbb{Z}^d)$ ;
- finde  $\varphi$  mit

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k \varphi(2x - k);$$

- setze

$$V_0 = \overline{\text{span}\{\varphi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}^d\}};$$

- setze

$$V_j := \{f \mid f(x) = g(2^j x), g \in V_0\}.$$

Dann sind (8), (11), (12) und (13) offenbar erfüllt. Es bleiben nun noch (9), (10) und (14) zu zeigen. Genaueres hierzu erfahren wir gleich in Abschnitt 2.2.

Wir wollen nun zwei einfache Beispiele für M.R.A.'s im  $L_2(\mathbb{R})$  angeben.

**Beispiel 2.4** Wir setzen

$$V_0 = \{f \in L_2(\mathbb{R}) : \text{supp } \hat{f} \subset [-\pi, \pi]\}$$

und definieren die Räume  $V_j$  durch

$$f \in V_j \text{ genau dann, wenn } f(x) = g(2^j x), \quad g \in V_0, \quad \text{gilt.}$$

Dann ist  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  eine M.R.A. (Schöne Übungsaufgabe! Beachte: es gilt  $(g(2^j \cdot))^\wedge(\xi) = 2^{-j} \hat{g}(2^{-j} \xi)$ , also ist  $f \in V_j$  genau dann, wenn  $\text{supp } \hat{f} \subset [-2^j \pi, 2^j \pi]$ . Damit folgt schon (8) usw.)

**Beispiel 2.5** M.R.A. mit kardinalen B-Splines

**Definition 2.6** Die Funktion  $N_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die rekursiv durch

$$N_m(x) := \int_0^1 N_{m-1}(x-t) dt \quad (19)$$

mit

$$N_1(x) = \chi_{[0,1)}(x)$$

definiert ist, heißt **kardinaler B-Spline** der Ordnung  $m$ .

**Satz 2.7** *Es gilt*

$$N_m \text{ ist ein stückweises Polynom vom Grad } m - 1; \quad (20)$$

$$N_m \geq 0; \quad (21)$$

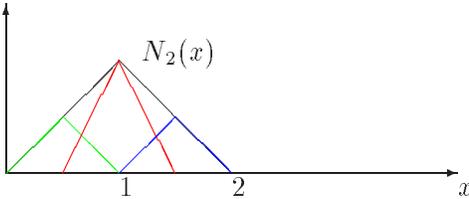
$$\text{supp } N_m \subset [0, m]; \quad (22)$$

$$N_m \in C^{m-2}, \quad m \geq 2; \quad (23)$$

$$N_m(x) = 2^{1-m} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} N_m(2x - k); \quad (24)$$

$$a(z) = 2^{1-m} (1 + z)^m. \quad (25)$$

Wegen (24), (25) ist also jeder kardinale B-Spline eine verfeinerbare Funktion, und man kann zeigen, daß er tatsächlich Generator einer M.R.A. ist.



Das Bild zeigt den B-Spline  $N_2$ , es sind außerdem  $2^{-1}N_2(2x)$ ,  $N_2(2x - 1)$  und  $2^{-1}N_2(2x - 2)$  eingezeichnet. Man erkennt hieran sehr schön die Bedeutung von Verfeinerbarkeit!

## 2.2 Die Räume $\mathcal{L}_2$ und $\mathcal{E}_2$ , Orthogonalität

Wir führen nun bestimmte Teilräume des  $L_2(\mathbb{R}^d)$  ein, die sich für die Wavelet-Konstruktion als zweckmäßig erwiesen haben. Dazu betrachten wir die Periodisierung

$$f^0 := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |f(\cdot - k)| \quad (26)$$

und setzen

$$|f|_2 := \|f^0\|_{L_2([0,1]^d)}. \quad (27)$$

Die 'richtigen' Räume sehen dann folgendermaßen aus:

**Definition 2.8** *Die Räume  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^d)$  und  $\mathcal{E}_2(\mathbb{R}^d)$  (Raum der exponentiell abfallenden Funktionen) sind durch*

$$\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^d) := \{f \mid |f|_2 < \infty\} \quad (28)$$

und

$$f \in \mathcal{E}_2(\mathbb{R}^d) \iff \|f(\cdot + k)\|_{L_2([0,1]^d)} \leq C_5 q^{|k|}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d, \quad 0 < q < 1, \quad (29)$$

definiert.

Man hat die Inklusionen  $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{L}_2 \subset L_2$ . Es stellt sich heraus, daß eine verfeinerbare Funktion  $\varphi \in \mathcal{L}_2$  mit  $\ell_2$ -stabilen Translaten unter einer schwachen Zusatzvoraussetzung tatsächlich eine M.R.A. erzeugt.

**Satz 2.9** *Sei  $\varphi \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^d)$  verfeinerbar mit  $\mathbf{a} \in \ell_1(\mathbb{Z}^d)$ . Besitzt dann  $\varphi$   $\ell_2$ -stabile Translate, so ist  $\varphi$  Generator einer M.R.A.*

Zur Konstruktion von Wavelets ist es zweckmäßig, von einem Generator mit **stabilen** Translaten zu einem neuen Generator mit **orthonormalen** Translaten überzugehen. Es stellt sich heraus, daß sich eine solche Orthonormalisierungsprozedur zumindestens im Raum  $\mathcal{E}_2$  geschlossen durchführen läßt.

**Satz 2.10** *Sei  $\varphi \in \mathcal{E}_2$  Generator einer M.R.A. Dann ist die Funktion  $\phi$ , deren Fourier-Transformierte durch*

$$\hat{\phi}(\xi) := \frac{\hat{\varphi}(\xi)}{(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\hat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2)^{1/2}} \quad (30)$$

definiert ist, Generator derselben M.R.A.  $\phi$  ist ebenfalls in  $\mathcal{E}_2$  enthalten und es gilt

$$\langle \phi(\cdot), \phi(\cdot - k) \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) \overline{\phi(x - k)} dx = \delta_{0,k}. \quad (31)$$

### 3 Wie konstruiert man Wavelets?

Wir werden nun erläutern, wie man mittels einer M.R.A. eine Wavelet-Basis konstruieren kann. Wie schon oben erwähnt, muß man ‘nur’ eine geeignete Basis für das orthogonale Komplement  $W_0$  von  $V_0$  in  $V_1$  finden. Zunächst betrachten wir den Fall (orthonormaler) Wavelets im  $L_2(\mathbb{R})$ . Es stellt sich heraus, daß man in diesem Fall nur ein einziges Mother Wavelet benötigt.

#### 3.1 Orthonormale Wavelets im $L_2(\mathbb{R})$

**Satz 3.1** Sei  $\phi \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$  ( $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$ ) Generator einer M.R.A.  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ ,  $\mathbf{a} \in \ell_1(\mathbb{Z})$ , und  $\langle \phi(\cdot), \phi(\cdot - k) \rangle = \delta_{0,k}$ . Sei weiter  $\psi(x)$  durch

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{a_{1-k}} \phi(2x - k) =: \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \phi(2x - k) \quad (32)$$

definiert. Dann gilt

- i.)  $\langle \psi(\cdot), \psi(\cdot - k) \rangle = \delta_{0,k}$ , und der Raum  $W_0 = \overline{\text{span}\{\psi(\cdot - k) \mid k \in \mathbb{Z}\}}$ , erfüllt  $V_1 = V_0 \oplus W_0$ , und  $W_0 \perp V_0$ ;
- ii.)  $\{2^{j/2} \psi(2^j \cdot - k)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  ist ONB des  $L_2(\mathbb{R})$ ;
- iii.)  $\psi \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$  ( $\mathcal{E}_2(\mathbb{R})$ ).

**Bemerkung 3.2** i) Die Eigenschaften ii.) und iii.) folgen relativ leicht aus (32) und i.). Der zentrale Punkt ist also der Beweis von i.). Neben der Orthonormalität der Translate von  $\phi$  wird dabei entscheidend die spezielle Gestalt der Koeffizientenfolge  $\{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  entsprechend (32) benutzt.

ii) Wie wir oben gesehen haben, ist die Forderung nach Orthonormalität der Translate von  $\phi$  im Raum  $\mathcal{E}_2$  keine Einschränkung.

iii) Anwendung der Fourier-Transformation auf (32) liefert die äquivalente Darstellung

$$\hat{\psi}(\xi) = \frac{1}{2} b(z) \hat{\phi}(\xi/2) = -\frac{1}{2} z \overline{a(-z)} \hat{\phi}(\xi/2), \quad b(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k z^k. \quad (33)$$

Satz 3.1 liefert also folgenden Algorithmus zur Konstruktion von Wavelets:

- Finde eine Funktion  $\varphi \in \mathcal{E}_2(\mathbb{R}^d)$  mit  $\ell_2$ -stabilen Translate, welche verfeinerbar mit  $\mathbf{a} \in \ell_1(\mathbb{Z})$  ist. Wegen Satz 2.9 ist dann  $\varphi$  Generator einer M.R.A.;
- Orthonormalisiere mittels Satz 2.10, das heißt gehe über zu

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{\hat{\varphi}(\xi)}{(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2)^{1/2}};$$

- bestimme das zu  $\phi$  gehörende Symbol  $\tilde{a}(z)$ ;
- berechne  $b(z)$  und damit  $\hat{\psi}(\xi) = \frac{1}{2} b(z) \hat{\phi}(\xi/2)$ .

**Beispiel 3.3** B-Spline Wavelets. Wir wollen obigen Algorithmus auf den kardinalen B-Spline  $N_2$  anwenden. Da  $N_2$  kompakten Träger besitzt, gilt  $N_2 \in \mathcal{E}_2$ . O.B.d.A. können wir zur zentralisierten Version  $\tilde{N}_2(x) := N_2(x+1)$  übergehen. Die Translate von  $\tilde{N}_2$  sind nicht mehr orthonormal, wir müssen also unsere Orthonormalisierungsprozedur durchführen. Nach längerer Rechnung erhält man:

$$\hat{\phi}(\xi) := \frac{\hat{\tilde{N}}_2(\xi)}{(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\tilde{N}}_2(\xi + 2\pi k)|^2)^{1/2}} = \left( \frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2} \right)^2 \frac{1}{(1 - \frac{2}{3} \sin^2(\xi/2))^{1/2}},$$

damit ergibt sich nach weiterer längerer Rechnung

$$\tilde{a}(z) = 2 \cos^2(\xi/4) \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2(\xi/2)\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2(\xi/4)\right)^{1/2}$$

und damit schließlich

$$\hat{\psi}(\xi) = \frac{1}{2} b(z) \hat{\phi}(\xi/2) = -e^{-i\xi/2} \sin^2\left(\frac{\xi}{4}\right) \left(\frac{\sin\left(\frac{\xi}{4}\right)}{\frac{\xi}{4}}\right)^2 \left(\frac{1 - \frac{2}{3} \cos^2\left(\frac{\xi}{4}\right)}{1 - \frac{2}{3} \sin^2\left(\frac{\xi}{4}\right)}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)^{-1/2}.$$

### 3.2 Wavelets mit kompaktem Träger

Bislang haben wir einen schönen Algorithmus zur Konstruktion von Wavelets kennengelernt. Ein zentraler Schritt war die Orthonormalisierungsprozedur. Im Raum  $\mathcal{E}_2$  hatte dies keine Probleme zur Folge. In der Praxis benötigt man aber häufig Wavelets, die nicht nur in  $\mathcal{E}_2$  sind, sondern darüberhinaus kompakten Träger besitzen. Startet man nun mit einem Generator mit kompaktem Träger, so wird diese Eigenschaft leider durch das Orthonormalisieren zerstört. Um die Orthonormalisierung zu vermeiden, muß man also eine Familie von hinreichend glatten Generatoren mit kompaktem Träger konstruieren, deren Translate von vornherein schon orthogonal sind. Eine solche Konstruktion ist erstmals I. Daubechies [4, 5] gelungen.

**Satz 3.4** *Es existiert ein  $\beta \in \mathbb{R}^+$ , so daß es für alle  $N \geq 2$  einen Generator  $\phi^N$  und ein Wavelet  $\psi^N$  gibt mit  $\psi^N, \phi^N \in C^{\beta N}(\mathbb{R})$ ,  $\text{supp } \psi^N = [-(N-1), N]$ ,  $\text{supp } \phi^N = [0, 2N-1]$ .  $\phi^N$  genügt außerdem der Bedingung  $\langle \phi^N(\cdot), \phi^N(\cdot - k) \rangle = \delta_{0,k}$ .*

### 3.3 Prä-Wavelets

Natürlich lassen sich mittels einer M.R.A. auch Prä-Wavelets konstruieren. Man muß dazu eine Funktion  $\psi$  finden, deren Translate eine  $\ell_2$ -stabile Basis des orthogonalen Komplementes  $W_0$  von  $V_0$  in  $V_1$  bilden, untereinander aber nicht mehr notwendigerweise orthogonal sind. Diese Bedingung ist natürlich viel schwächer als volle Orthogonalität und bietet daher sehr viel nützlichen Freiraum. Insbesondere kann man zur Konstruktion von Prä-Wavelets auf die Orthogonalisierungsprozedur verzichten. Dies ermöglicht etwa die Konstruktion von B-Spline Prä-Wavelets mit kompaktem Träger.

### 3.4 Wavelets im $L_2(\mathbb{R}^d)$

Hat man eine Wavelet-Basis für den  $L_2(\mathbb{R})$  konstruiert, so läßt sich daraus mittels **Tensorprodukten** leicht auch eine mehrdimensionale Wavelet-Basis gewinnen. Es stellt sich heraus, daß man nun mehr als ein Mother Wavelet benötigt, und zwar genau  $2^d - 1$  Stück. Wir geben hier nur ein Resultat für den zweidimensionalen Fall an. (Die höherdimensionalen Fälle lassen sich aber völlig analog abhandeln).

**Satz 3.5** *Seien  $\phi$  und  $\psi$  entsprechend Satz 3.1 gewählt. Dann bildet das Funktionensystem*

$$\{\phi(x)\psi(y), \psi(x)\phi(y), \psi(x)\psi(y)\} \tag{34}$$

*eine Familie von orthonormalen (mother) Wavelets im  $L_2(\mathbb{R}^2)$ .*

Natürlich gibt es eine ganze Reihe alternativer Möglichkeiten zur Konstruktion von (Prä-)Wavelet Basen in höheren Dimensionen, siehe etwa [6, 9], aber eine auch nur ansatzweise Beschreibung würde den hier zur Verfügung stehenden Rahmen sprengen.

## 4 Welche Eigenschaften haben Wavelets und M.R.A.'s?

### 4.1 Oszillation

Charakteristisch für Wavelets ist ihr oszillatorisches Verhalten, dessen Ausprägung typischerweise von der Glattheit des Wavelets abhängt. Diese Oszillationen sind eine Folge der Eigenschaft der **verschwindenden Momente**. Ein typisches Resultat in dieser Richtung sieht folgendermaßen aus.

**Satz 4.1** Sei  $\psi^N$  entsprechend Satz 3.4 konstruiert. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} x^\alpha \psi^N(x) dx = 0 \quad \text{für } 0 \leq \alpha \leq N - 1. \quad (35)$$

### 4.2 Approximation

Da die Vereinigung der Räume  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  der M.R.A. wegen (9) dicht im  $L_2(\mathbb{R}^d)$  liegt, läßt sich natürlich jede beliebige Funktion  $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$  mit beliebiger Genauigkeit mittels dieser Räume approximieren. Man würde aber ja vermuten, daß diese Approximation umso besser wird, je 'glatter'  $f$  und je 'glatter' der Generator  $\varphi$  sind. Tatsächlich gilt die folgende **Jackson–Ungleichung**:

**Satz 4.2** Sei  $\varphi$  Generator einer M.R.A. Sei weiter  $\varphi \in C^r(\mathbb{R}^d)$  und  $\text{supp } \varphi$  kompakt. Dann gilt für  $f \in H^r$

$$\inf_{g \in V_j} \|f - g\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_6 2^{-jr} |f|_{H^r}. \quad (36)$$

### 4.3 Regularität

In unserem zentralen Algorithmus war es erforderlich, zu einer gegebenen Koeffizientenfolge  $\mathbf{a}$  bzw. zum entsprechenden Symbol  $a(z)$  eine geeignete verfeinerbare Funktion  $\varphi$  zu konstruieren. Hierzu kann man folgendermaßen vorgehen. Iteration von (18) liefert eine Darstellung der Fourier–Transformierten der gesuchten Funktion:

$$\hat{\varphi}(\xi) = C_7 \prod_{j=1}^{\infty} \frac{a(e^{-i2^{-j}\xi})}{2^d}. \quad (37)$$

Man muß dann zeigen, daß das obige unendliche Produkt tatsächlich im  $L_2$ –Sinne konvergiert. Außerdem ist die Stabilität der Translate der zugehörigen Funktion  $\varphi$  nachzuweisen. Darüberhinaus möchte man natürlich die Regularität von  $\varphi$  abschätzen. Man weiß aber, daß die Glattheit einer Funktion mit der Lokalität ihrer Fourier–Transformierten korreliert ist. Die Lokalität von  $\hat{\varphi}$ , also der Abfall des unendlichen Produktes auf der rechten Seite von (37), läßt sich über geeignete Bedingungen an das Symbol  $a(z)$  selbst abschätzen. Typische Resultate dieser Form findet man etwa in [5].

Eine weitere in der Praxis wichtige Regularitätsabschätzung wird durch die sogenannte **Bernstein–Ungleichung** geliefert.

**Satz 4.3** Sei  $\varphi$  Generator einer M.R.A.,  $\varphi \in C^r(\mathbb{R}^d)$ , und  $\text{supp } \varphi$  kompakt. Dann gilt für  $f \in V_j$

$$|f|_{H^r} \leq C_8 2^{jr} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \quad (38)$$

### 4.4 Wavelets und Funktionenräume

Wir kommen nun zur vielleicht wichtigsten Eigenschaft von Wavelets, nämlich zur Charakterisierung von Funktionenräumen mittels Wavelet–Entwicklungen. Sei  $\Psi$  eine (Prä–)Wavelet Basis des  $L_2(\mathbb{R}^d)$ . Dann besitzt jede Funktion  $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$  eine Darstellung der Form (2). Für die meisten in der Praxis wichtigen Funktionenräume läßt sich nun anhand des Abfalls der Wavelet–Koeffizienten  $c_{i,j,k}$  ablesen, ob die Funktion  $f$  in diesem Raum enthalten ist oder nicht. Zum Beispiel gilt für die klassischen Sobolev–Räume das folgende Resultat.

**Satz 4.4** Sei  $\varphi$  Generator einer M.R.A.,  $\text{supp } \varphi$  kompakt und  $\varphi \in C^r(\mathbb{R}^d)$ . Sei weiter  $\Psi$  ein zugehöriges Prä-Wavelet-System. Dann gilt für  $s < r$

$$f \in H^s \iff \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{2js} \sum_{i \in I, k \in \mathbb{Z}^d} |c_{i,j,k}|^2 < \infty. \quad (39)$$

**Bemerkung 4.5** Die entscheidenden Beweishilfsmittel sind die Jackson- und die Bernstein-Ungleichungen (36) und (38), die unter den obigen Voraussetzungen ja gelten. Moral von der Geschichte: Regularität und Approximation gibt Charakterisierung von Funktionenräumen!

## 5 Wozu kann man Wavelets benutzen?

Das Hauptanwendungsgebiet von Wavelet Analysis ist sicher die Signalanalyse. Wir gehen davon aus, daß unser (eindimensionales) Signal  $f(x)$  endliche Energie besitzt, es soll also  $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty$  gelten, d.h.  $f \in L_2(\mathbb{R})$ . Wir wollen  $f$  mittels Wavelet-Entwicklungen analysieren und Datenkompressionsstrategien entwickeln. Wir benutzen hierzu die Daubechies-Wavelets und Generatoren entsprechend Theorem 3.4,  $\phi = \phi^N$ ,  $\psi = \psi^N$ . Wir suchen zunächst ein mathematisches Modell für eine Abbildung  $T_r$  (scaling transform), welche dem Signal  $f$  eine geeignete Approximation  $T_r(f)$  mit ‘Auflösung’  $r$  zuordnet. Definition 2.1, insbesondere (8)–(10) suggerieren nun,  $T_{2^j}$  gerade durch die orthogonalen Projektoren  $P_j$  auf die Räume  $V_j$  zu modellieren. Diese sind gegeben durch

$$P_j(f)(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f(\cdot), 2^{j/2} \phi(2^j \cdot - k) \rangle 2^{j/2} \phi(2^j x - k) =: \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}. \quad (40)$$

In der Praxis ist im allgemeinen nicht das Signal  $f$  selbst, sondern eben nur eine Approximation gegeben. Sie besteht typischerweise aus einem diskreten Datensatz  $\{\lambda_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , der durch ein ‘measuring device’, etwa einen Scanner, erzeugt wird. Wir interpretieren diesen Datensatz als die Koeffizienten der Projektion von  $f$  auf den Raum  $V_j$ , d.h. wir setzen

$$\lambda_k^j = \langle f, \phi_{j,k} \rangle.$$

Wegen (8) ist  $P_{j-1}$  schon durch  $P_j$  bestimmt (Kausalitätsprinzip, feinere Auflösung bestimmt gröbere Auflösung). Tatsächlich gilt

$$P_{j-1}(f) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \lambda_l^{j-1} \phi_{j-1,l} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} 2^{-1/2} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{a}_{k-2l} \lambda_k^j \right) \phi_{j-1,l}. \quad (41)$$

Wir sehen, daß die Koeffizientenfolge  $\mathbf{a}$  der Zwei-Skalen-Gleichung einen **diskreten Filter**  $H$  induziert,

$$\lambda^{j-1} = H \lambda^j, \quad \lambda_l^{j-1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-1/2} \bar{a}_{k-2l} \lambda_k^j. \quad (42)$$

Da die Anwendung von  $H$  offenbar dem Übergang zu einer größeren Approximation entspricht, ist  $H$  ein Tiefpaßfilter. Die Wavelet-Räume  $W_j$  waren gerade die Komplemente von  $V_j$  in  $V_{j+1}$ , die zugehörigen Projektoren

$$Q_j(f) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^j \psi_{j,k} \quad (43)$$

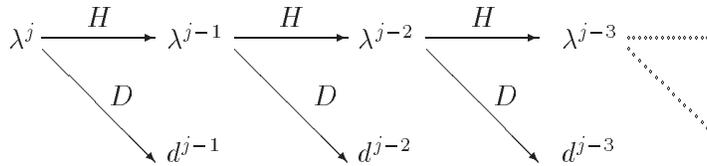
beschreiben also die von  $V_j$  nach  $V_{j+1}$  hinzukommende Detailinformation. Es gilt analog zu (41)

$$Q_j(f) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} 2^{-1/2} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{b}_{k-2l} \lambda_k^{j+1} \right) \psi_{j,l}. \quad (44)$$

Die Koeffizientenfolge  $\mathbf{b}$  der Funktionalgleichung (32) induziert also ebenfalls einen diskreten Filter  $D$

$$c^j = D \lambda^{j+1}, \quad c_l^j = 2^{-1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{b}_{k-2l} \lambda_k^{j+1}. \quad (45)$$

Offenbar entspricht  $D$  einem Hochpaßfilter. Der Grobanteil  $P_{j-1}(f)$  kann nun durch erneute Anwendung von  $H$  und  $D$  weiter zerlegt werden und wir erhalten die **schnelle Wavelet–Transformation**, d.h. den Pyramiden–Algorithmus:



der eine nichtredundante Zerlegung von  $f$  in Grobinformation und immer feinere Detailinformation liefert. Das so zerlegte Signal kann vollständig wieder rekonstruiert werden durch sukzessives Anwenden der Rücktransformation

$$\lambda_l^j = 2^{-1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{l-2k} \lambda_k^{j-1} + 2^{-1/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_{l-2n} c_n^{j-1}. \quad (46)$$

Die schnelle Wavelet–Transformation erlaubt sehr effiziente Datenkompressionsstrategien, etwa indem hinreichend kleine Wavelet–Koeffizienten vernachlässigt werden. Ist etwa das Signal in einem gewissen Bereich ‘glatt’, so ist der Anteil der Detailinformation gering. Daher sind die Wavelet–Koeffizienten entsprechend klein und man erreicht hohe Kompressionsraten. Die Wavelet–Koeffizienten sind in den Bereichen groß, in denen das Signal  $f$  ‘rauh’ ist (Kantenerkennung).

## Literatur

- [1] C. Blatter, *Wavelets – Eine Einführung*, Advanced Lectures in Mathematics, Vieweg, 1998.
- [2] C.K. Chui, *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, Boston, 1992.
- [3] A. Cohen und R.D. Ryan, *Wavelets and Multiscale Signal Processing*, Chapman & Hall, 1995.
- [4] I. Daubechies, Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.* **41** (1987), 909–996.
- [5] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS–NSF Regional Conference Series in Applied Math. **61**, SIAM, Philadelphia, 1992.
- [6] R.Q. Jia und C.A. Micchelli, Using the refinement equations for the construction of pre-wavelets II: Powers of two, in: “Curves and Surfaces”, (P.J. Laurent, A. Le Méhauté und L.L. Schumaker, Eds.), Academic Press, New York, 1991.
- [7] A.K. Louis, P. Maass und A. Rieder, *Wavelets: Theorie und Anwendungen*, Teubner, Stuttgart, 1994.
- [8] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, 1998.
- [9] Y. Meyer, *Wavelets and Operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **vol. 37**, Cambridge, 1992.
- [10] M. Vetterli und J. Kovačević, *Wavelets and Subband Coding*, Prentice Hall, 1995.
- [11] G. Walter, *Wavelets and Other Orthogonal Systems with Applications*, CRC Press, 1994.
- [12] M.V. Wickerhauser, *Adaptive Wavelet–Analysis*, Vieweg, 1996.