Ein neuer Ansatz zur Konstruktion interpolierender Skalierungsfunktionen

Stephan Dahlke
Institut für Geometrie und
Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Karlheinz Gröchenig
Department of Mathematics U–9
University of Connecticut

Peter Maass
Fachbereich Mathematik
Universität Potsdam

1. Einleitung
2. Strang–Fix–Bedingungen
3. Interpolierende Skalierungsfunktionen
4. Beispiel

1. Einleitung

- verfeinerbare Funktionen ϕ

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k \phi(Ax - k), \quad \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d} \in \ell_2(\mathbb{Z}^d)$$

$A \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ expandierend, $|\lambda_i| > 1 \; \forall \; i, \; \lambda_i$ Eigenwert von A

Anwendungen:

- Konstruktion von Wavelets

  $V_j := \overline{\text{span}\{\phi(A^j \cdot -k), \; k \in \mathbb{Z}^d\}}$

  $\Longrightarrow \ldots \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots$

- CAGD...

ϕ interpolierend

$$\phi(k) = \delta_{0,k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}^d$$

- Vorteile:
  - $f \in \overline{\text{span}\{\phi(\cdot - k),\ k \in \mathbb{Z}^d\}}$
    $\Longrightarrow f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(k)\phi(x-k)$
  - Auswertung nichtlinearer Funktionale [Beylkin/Keiser], [Dahmen/Schneider/Xu]
  - Wavelet–Galerkin–Verfahren, Randbedingungen [Bertoluzza]
- Literatur:

Chui/Li	Cohen/Daubechies
D./Maass	Derado
Deslauriers/Dubuc	Donohu
Dyn/Levin	Lawton/Lee/Shen
Riemenschneider/Shen...	

meistens: $A = 2I$
allgemeine Skalierungmatrizen, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?

- Konstruktionsprinzip:

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{q} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k e^{-2\pi i \langle k, B^{-1}\omega \rangle} \hat{\phi}(B^{-1}\omega)$$

$$B = A^T, \qquad q = |\det A|$$

Iteration $\Longrightarrow$

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m(B^{-j}\omega),$$

$$m(\omega) := \frac{1}{q} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k e^{-2\pi i \langle k, \omega \rangle} \qquad \text{Symbol}$$

$$R := \{\rho_0, \ldots, \rho_{q-1}\} \hat{=} \mathbb{Z}^d / A\mathbb{Z}^d$$

$$R^T := \{\tilde{\rho}_0, \ldots, \tilde{\rho}_{q-1}\} \hat{=} \mathbb{Z}^d / B\mathbb{Z}^d$$

Theorem 1. [P.-G. Lemarié] *Sei $m(\omega)$ ein trigonometrisches Polynom mit*

(C1) $m(0) = 1$;

(C2) $m(\omega) \geq 0$;

(C3) $\sum_{\tilde{\rho} \in R^T} m(\omega + B^{-1}\tilde{\rho}) = 1$;

(C4) $m(\omega)$ *genügt Cohen's Bedingung, d.h.* $\exists$ *kompakte Menge* $K \supset U \ni 0$ *mit*

- $\bigcup_{l \in \mathbb{Z}^d}(l + K) = \mathbb{R}^d$

- $K \bigcap (l + K) \simeq \emptyset$, *falls* $l \neq 0$,

so daß

$$m(B^{-j}\omega) \neq 0 \quad \text{für alle} \quad \omega \in K \quad \text{und} \quad j \geq 1.$$

Dann ist $m(\omega)$ Symbol einer interpolierenden Skalierungsfunktion ϕ.

- Aufgabe:

Finde $m(\omega)$, das (C1)–(C4) erfüllt und

- ϕ möglichst glatt ist
- ϕ möglichst lokalisiert ist
- ϕ gut approximiert

Strang–Fix–Bedingungen

(C5) $\left(\frac{\partial}{\partial\omega}\right)^l m(B^{-1}\tilde{\rho}) = 0 \quad |l| \leq L-1,\ \tilde{\rho} \in R^T \backslash \{0\}$

Regularität $\Longleftrightarrow$ Strang–Fix–Bedingungen $\Longleftrightarrow$ Reproduktion von Polynomen $\Longleftrightarrow$ Approximationsordnung

$1D,\ \tilde{\rho} = 1,\ A = 2,$

(C5) $\Longrightarrow m(\omega) = \left(\frac{1+e^{-2\pi i\omega}}{2}\right)^L b(\omega)$

- 1D–Resultate:

$$\begin{aligned} m(\omega) + m(\omega + 1/2) &= 1 && (1) \\ m^{(l)}(1/2) &= 0, \quad 0 \le l \le 2L-1 && (2) \end{aligned}$$

I. $y = \sin^2(\pi\omega) \Longrightarrow$ Bezout–Problem

$$(1-y)^L P(y) + y^L P(1-y) = 1$$

$P(y) = P_L(y) + y^L R(1/2 - y)$, R ungerade,

$$P_L(y) = \sum_{k=0}^{L-1} \binom{L-1+k}{k} y^k$$

II. Ansatz:

$$m(\omega) = 1 - c_L \int_0^\omega \sin^{2L-1}(2\pi\omega) d\omega,$$

wählte c_L so daß $m(1/2) = 0$

III. (1) (2) ergeben $2L$ lineare Gleichungen für die Koeffizienten von $m(\omega)$, löse diese direkt

IV. Einfachste Lösung:

$$\cos^2(\pi\omega) + \sin^2(\pi\omega) = 1$$

Nehme $(2L-1)$–te Potenz, ordne Terme$\Longrightarrow$ Lösung P_L in I.

V. Sei $\ell_n(x)$, $n = -L, -L+1, \dots, L-1$, Lagrangeschen Fundamentalpolynome zu den Stützstellen $-L, \dots, L-1$, d.h. $\ell_n(k) = \delta_{k,n} \Longrightarrow$

$$m(\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=-L}^{L-1} \ell_n(-1/2) e^{-2\pi i(2n+1)\omega}$$

ist Lösung von (1) und (2)

Ziel: Verallgemeinerung von V.!

2. Strang–Fix Bedingungen

Π Menge von Polynomen

(C5') $\qquad (p(D)m)(B^{-1}\tilde{\rho}) = 0, \qquad \forall\, p \in \Pi,\ \tilde{\rho} \in R^T \backslash \{0\}$

$\mathcal{T} \subseteq \mathbb{Z}^d$

$\Pi_{\mathcal{T}} := \{\forall k \in \mathcal{T}\ \exists\ p_k \in \Pi_{\mathcal{T}}$ mit $p_k(j) = \delta_{j,k}\ \forall j \in \mathcal{T}\}$

Theorem 2. *Sei $\mathcal{P} \subseteq \Pi_{\mathcal{T}}$ mit*

(1) $p \in \mathcal{P} \Longrightarrow p\,(c(Ax+\rho)) \in \Pi_{\mathcal{T}}\ \forall c \in \mathbb{C},\ \ \rho \in R$*;*

(2) $p(0) = 0$ *für alle* $p \in \mathcal{P}$*.*

Dann genügt

$$m(\omega) = \frac{1}{q} + \frac{1}{q} \sum_{k \in \mathcal{T}} \sum_{\rho \in R \backslash \{0\}} p_k(-A^{-1}\rho) e^{-2\pi i \langle Ak+\rho,\omega\rangle} \qquad (3)$$

(C1), (C3), (C5').

Beweis von (C5'):

$$(p(D)m)(B^{-1}\tilde{\rho})$$

$$= \frac{1}{q} \sum_{\rho \in R \setminus \{0\}} \sum_{k \in \mathcal{T}} p_k(-A^{-1}\rho) p(-2\pi i (Ak + \rho)) e^{-2\pi i \langle Ak+\rho, B^{-1}\tilde{\rho}\rangle}$$

$$= \frac{1}{q} \sum_{\rho \in R \setminus \{0\}} e^{-2\pi i \langle \rho, B^{-1}\tilde{\rho}\rangle} \sum_{k \in \mathcal{T}} p_k(-A^{-1}\rho) p(-2\pi i (Ak + \rho))$$

$$(1) \Longrightarrow p(-2\pi i (A \cdot + \rho)) \in \Pi_{\mathcal{T}} \Longrightarrow$$

$$\sum_{k \in \mathcal{T}} p_k(-A^{-1}\rho) p(-2\pi i (Ak + \rho)) = p(-2\pi i (A \cdot + \rho))|_{-A^{-1}\rho}$$

$$= p(0) = 0 \qquad \text{wegen } (2) \qquad \square$$

3. Interpolierende Skalierungsfunktionen

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{a,L} := (a + [0,L]^d) \cap \mathbb{Z}^d, \quad a \in \mathbb{Z}^d,\ L \in \mathbb{N} \tag{4}$$

$$\Pi_{\mathcal{T}} = \mathrm{span}\{x^k,\ k \in \mathbb{Z}^d, \|k\|_\infty \le L,\ k_i \ge 0, i = 1,\dots,d\} \tag{5}$$

$$p_k(x) = \ell_{k_1}(x_1)\ell_{k_2}(x_2)\cdots\ell_{k_d}(x_d),$$

$$\ell_{k_i}(x_i) := \prod_{n=a_i, n\ne k_i}^{L+a_i} \frac{x_i - n}{k_i - n}$$

Lemma 1. *Seien $\mathcal{T}$, $\Pi_{\mathcal{T}}$ entsprechend (4) und (5) gewählt. Dann ist für $m(\omega)$ in (3)(C5') erfüllt. Außerdem gelten die gewöhnlichen Strang–Fix–Bedingungen der Ordnung $L+1$.*

Beweis: Wende Theorem 2 auf

$$\tilde{\Pi}_{\mathcal{T}} := \mathrm{span}\{x^k \mid k \in \mathbb{Z}^d,\ 1 \le \|k\|_\infty \le L,\ k_i \ge 0, i = 1, \dots, d\}$$

an! $\square$

Theorem 3. *Falls A einer der beiden Bedingungen*

i) $|\det A|$ *ist ungerade;*

ii) $|\det A|$ *ist gerade und* $\mathbb{Z}^d / A\mathbb{Z}^d$ *zyklisch mit Ordnung* $|\det A|$*;*

genügt, kann $\mathcal{T}_{a,L}$ *in* (4) *so gewählt werden, daß* $m(\omega)$ *entsprechend* (3), (5) *reell ist und* (C1), (C3), (C5') *erfüllt.*

4. Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$q = 2, \quad \rho_0 = 0, \quad \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{T} = [-L, L-1] \times [-L+1, L] \cap \mathbb{Z}^2$$

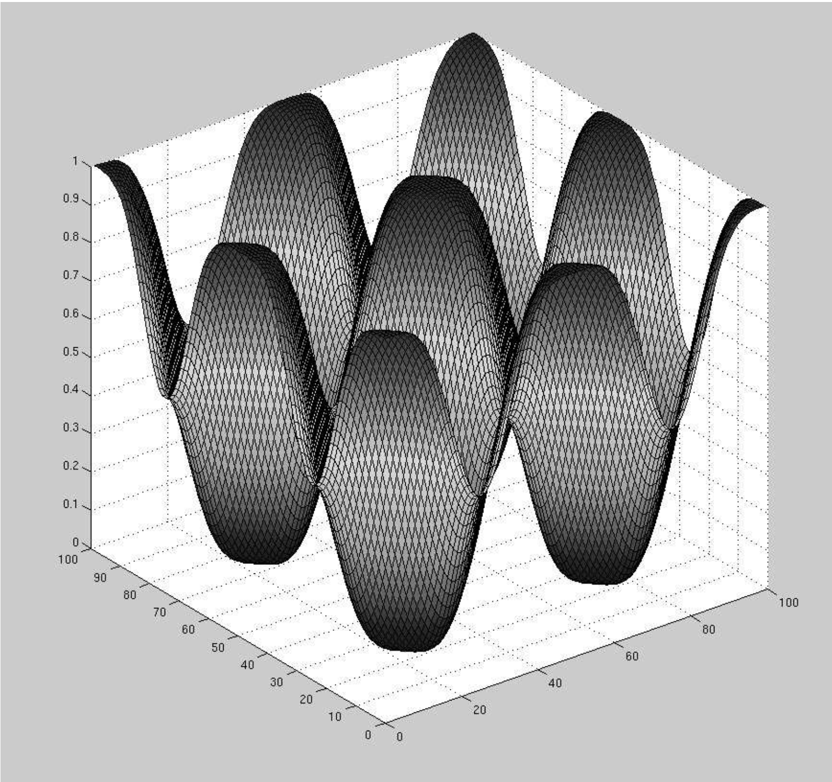
$$m(\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2\pi i(\omega_1+\omega_2)/2} q_L(\omega_1+\omega_2) e^{-2\pi i(\omega_2-\omega_1)/2} q_L(\omega_2-\omega_1)$$

$$q_L(x) := \sum_{n=-L}^{L-1} \ell_n(-1/2) e^{-2\pi i n x}$$

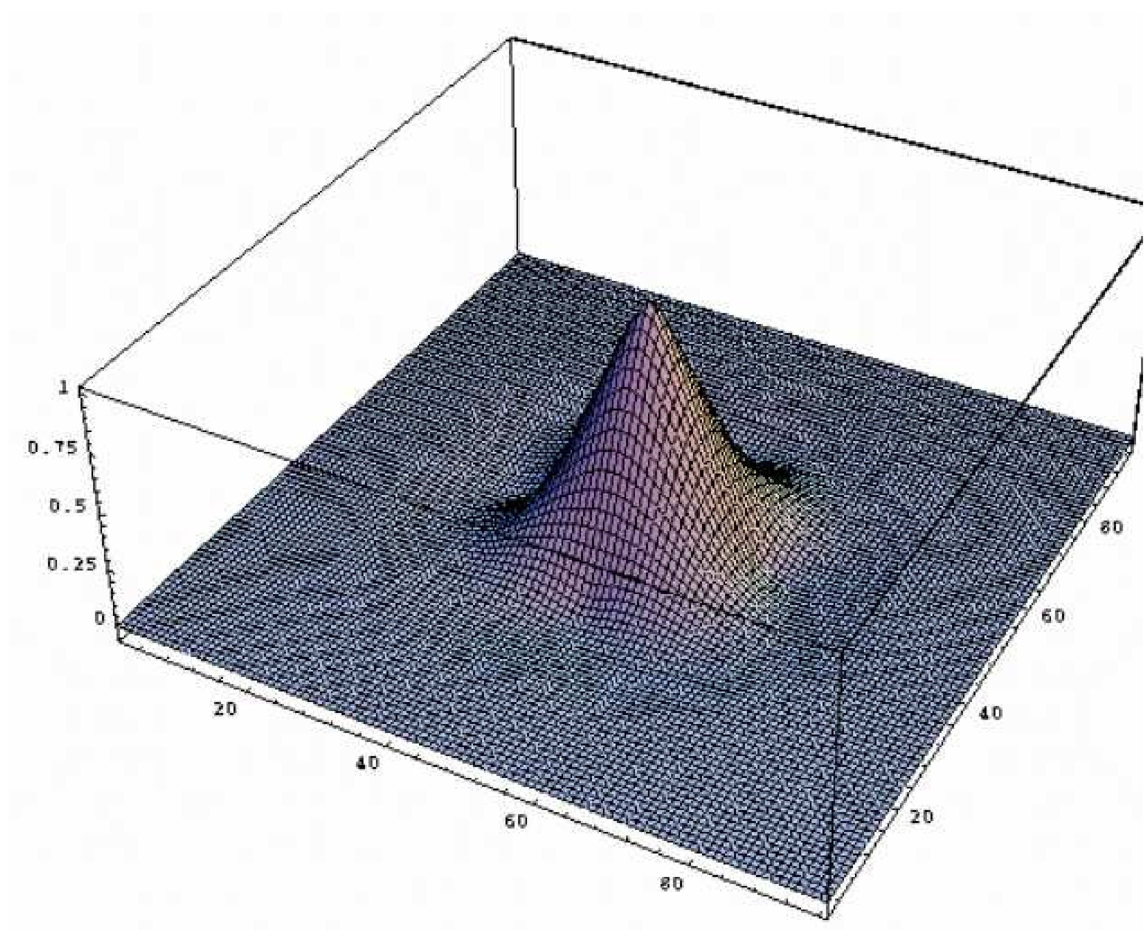
$m(\omega) \geq 0$, Cohen's Bedingung ist erfüllt, Theorem 1, Theorem 3 $\Longrightarrow$ $m(\omega)$ erzeugt interpolierende Skalierungsfunktion ϕ !

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \frac{1}{512} & & & \\
 & & \frac{-9}{512} & & \frac{-9}{512} & & \\
 & \frac{-9}{512} & & \frac{81}{512} & & \frac{-9}{512} & \\
\frac{1}{512} & & \frac{81}{512} & \frac{1}{2} & \frac{81}{512} & & \frac{1}{512} \\
 & \frac{-9}{512} & & \frac{81}{512} & & \frac{-9}{512} & \\
 & & \frac{-9}{512} & & \frac{-9}{512} & & \\
 & & & \frac{1}{512} & & &
\end{array}
$$

Figur 1: Koeffizienten für $L = 2$



Figur 2: Symbol $m(\omega_1, \omega_2)$, $L = 2$



Figur 3: Interpolierende Skalierungsfunktion $\phi(x)$

Regularität? $\phi \in H^s, \quad s < 1.452$

Zusammenfassung

- interpolierende Skalierungsfunktionen
- konstruktiver Ansatz für allgemeine Skalierungsmatrizen
- Lagrange–Interpolation
- Strang–Fix–Bedingungen hoher Ordnung bei kleinem Träger