Wavelets: Geschichte und Theorie

Stephan Dahlke
Institut für Geometrie und
Praktische Mathematik
RWTH Aachen
Templergraben 55
52056 Aachen
http://www.igpm.rwth-aachen.de/∼dahlke

1. Motivation
2. Geschichte
3. Multiresolution Analysis
4. Konstruktion von Wavelets
5. Eigenschaften von Wavelets

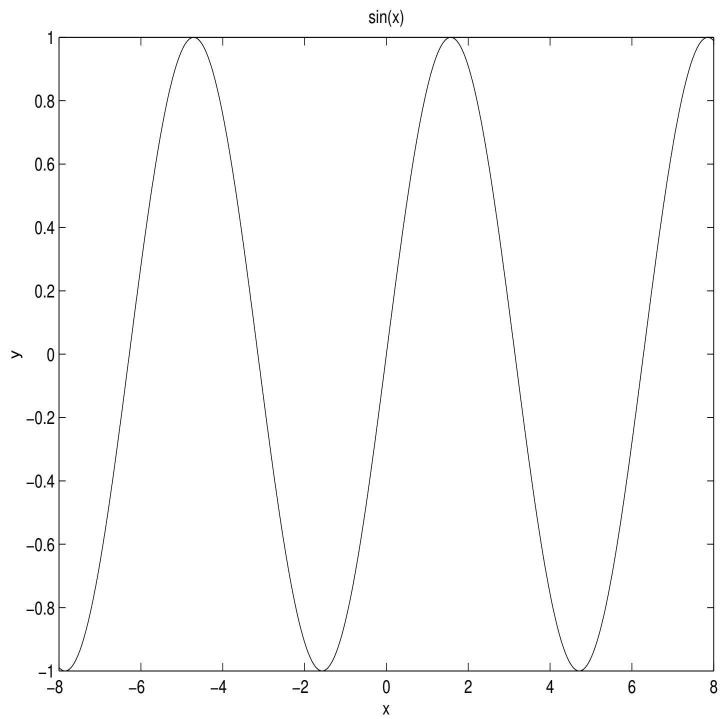
1 Motivation

Darstellung/Analyse/Zerlegung von Signalen
Signal $\hat{=}$ Funktion $y = f(x), \;\; x \in I\!R$
Zerlegung in geeignete Grundbausteine, "Basisfunktionen"
"Klassische" Methode: Fourier–Entwicklung,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}, \quad c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

Grundbausteine der Form



In vielen Fällen sehr gut!
Problem: Basisfunktionen nicht lokal!

Idee: Konstruiere Basisfunktionen durch Dilatieren und Translatieren (einer oder mehrerer) "Mutterfunktionen".

Wavelets: spezielle Basen der Form

$\psi_{i,j,k}(x) := 2^{jd/2}\psi_i(2^j x - k), \qquad i \in I,\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z},$

supp $\psi_i := \{x \in \mathbb{R} \mid \psi(x) \neq 0\} \subset Q = [x_0, x_1] \Longrightarrow$
supp $\psi_{i,j,k} \subset 2^{-j}(Q + k)$

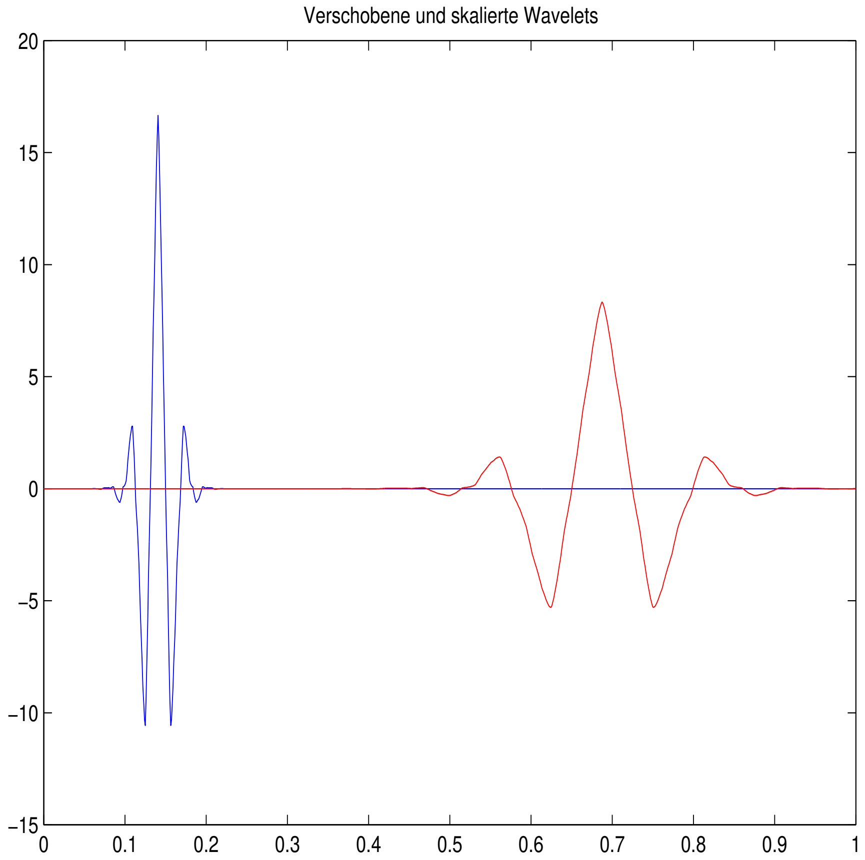
$\{\psi_i\}_{i \in I}$ Mother Wavelets

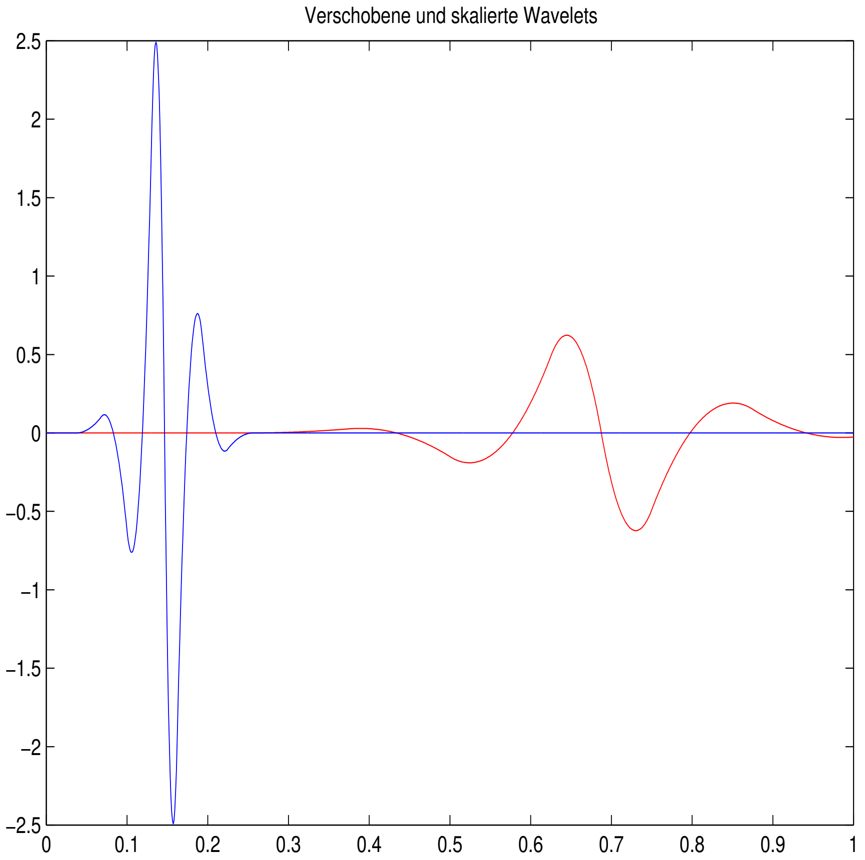
$$f(x) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{i,j,k} \psi_{i,j,k}(x)$$

Wavelet–Darstellung ist lokal !

$c_{i,j,k} \mathrel{\hat{=}}$ Verhalten von f auf $2^{-j}(Q + k) \Longrightarrow$

höhere Skalen j entsprechen Auflösung feinerer Details


Verschobene und skalierte Wavelets
20
15
10
5
0
−5
−10
−15
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1


Verschobene und skalierte Wavelets
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−2.5
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

2 Geschichte

- Zeit–Frequenz–Analyse, Gabor 1946
  gefensterte Fourier–Transformation

$$C_{m,n} = \int_{I\!R} f(x) g(x - n x_0) e^{-i m \omega_0 x} dx$$

- Geophysik, Morlet 1982
  Idee: benutze Dilatationen!

$$\begin{aligned} C_{j,k} &= \int_{I\!R} f(x) 2^{j/2} \overline{\psi(2^j x - k)} dx, \\ \hat{\psi}(\xi) &= \xi^2 e^{-\xi^2/2} \end{aligned}$$

Die Fourier–Transformierte von f ist die Funktion

$$\hat{f}(\xi) \quad = \quad \int_{I\!R} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

Fragen: Morlet–Ansatz wohldefiniert, Invertierbarkeit etc.

- Mathematische Physik, Marseille–Team, Grossmann/Paul 1984

$$\begin{aligned}
U_{a,b} \quad &: \quad \psi \longmapsto |a|^{-1/2} \psi \left(\frac{\cdot - b}{a} \right) \quad \text{coherent states} \\
(Wf)_{a,b} \quad &:=: \quad |a|^{-1/2} \int_{I\!R} f(x) \overline{\psi \left(\frac{x-b}{a} \right)} dx \\
&= \quad \langle f, U_{a,b}(\psi) \rangle_{L_2} \\
L_2(I\!R) \quad &= \quad \left\{ f \mid \int_{I\!R} |f(x)|^2 dx < \infty \right\} \\
\langle f, g \rangle_{L_2} \quad &= \quad \int_{I\!R} f(x) \overline{g(x)} dx \\
\|f\|_{L_2} \quad &= \quad \langle f, f \rangle_{L_2}^{1/2} = \left(\int_{I\!R} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

$a = 2^{-j},\ b = 2^{-j}k \rightsquigarrow$ Morlet–Ansatz!

“mathematisches Mikroskop”

Ist die Verträglichkeitsbedingung

$$\int_{I\!R} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty$$

erfüllt, so ist W eine Isometrie von $L_2(I\!R)$ in $L_2(I\!R \backslash \{0\} \times I\!R, a^{-2} dadb)$. W heißt stetige Wavelet–Transformation, ψ admissible Wavelet, Mother Wavelet

$$f = c_\psi^{-1} \int_{I\!R} \int_{I\!R \backslash \{0\}} \langle f, U_{a,b}\psi \rangle U_{a,b}(\psi) \frac{dadb}{a^2}$$

$\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ heißt frame, falls

$$A\|f\|_{L_2}^2 \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle f, e_n\rangle_{L_2}|^2 \le B\|f\|_{L_2}^2$$

$$\left\{|a_0|^{-m/2}\psi\left(\frac{\cdot - nb_0a_0^m}{a_0^m}\right)\right\}_{m,n\in\mathbb{Z}} \qquad \text{Wavelet–Frame}$$

- Operatortheorie, Y. Meyer 1985

$$\begin{aligned}
(Tf)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} K(x-y)f(y)dy \\
(\tau_a f)(x) &= f(ax) \\
\tau_{a^{-1}}T\tau_a &= T \\
K(ax) &= a^{-d}K(x)
\end{aligned}$$

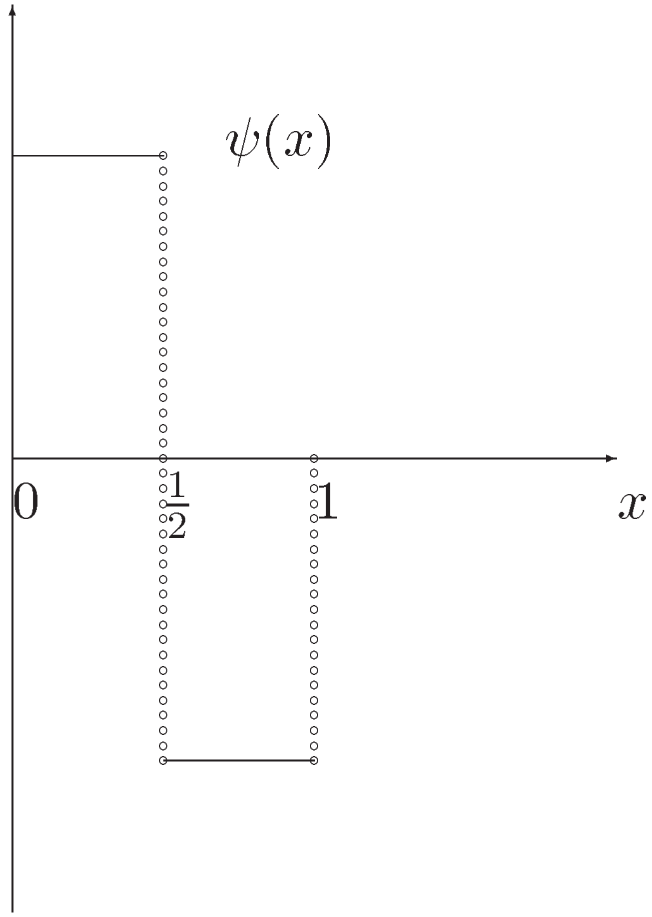
Frage: existiert $\psi \in L_2(\mathbb{R})$, ψ hinreichend glatt, hinreichend lokalisiert, so daß

$$\{2^{j/2}\psi(2^j\cdot - k)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$$

Orthonormalbasis des $L_2(\mathbb{R})$ ist?

Beispiel : Haar–Basis, A. Haar 1910

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



ψ lokalisiert, aber nicht sehr glatt! Meyer's Vermutung: Heisenberg'sche Unschärferelation $\Longrightarrow$
ψ existiert nicht!
Aber: Meyer fand ψ lokalisiert, $\psi \in C^\infty$!
Fragen: Höhere Dimensionen etc.

- Signalanalyse, Filterdesign, S. Mallat 1986

$$
\begin{aligned}
P_j(f) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k}\rangle \varphi_{j,k}, \quad \varphi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\varphi(2^j x - k) \\
Q_j(f) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k}\rangle \psi_{j,k} \\
P_j(f) &\longrightarrow 0, \quad j \longrightarrow -\infty \\
P_j(f) &\longrightarrow f, \quad j \longrightarrow \infty \\
Q_j &= P_j - P_{j-1}
\end{aligned}
$$

- P.–G. Lemarié 1988
  exponentiell abfallende Wavelets

- I. Daubechies 1988
  $\psi \in C^N$, beschränkter Träger

- Approximations– und Splinetheorie, R.-Q. Jia/ C.A. Micchelli 1991
  allgemeines Konstruktionsprinzip im $L_2(\mathbb{R}^d)$

- nochmals theoretische Physik, J.P. Antoine 1992
  stetige Wavelet–Transformation im $\mathbb{R}^d$

- A. Cohen/ I. Daubechies/ J.–C. Feauveau 1992
  biorthogonale Wavelets

- A. Cohen/ I. Daubechies 1993
  Wavelets für allgemeine Skalierungsmatrizen

- C. de Boor, R. DeVore, A. Ron 1993
  verallgemeinerte Konstruktionsprinzipien

- $\sim$1995 Wavelets auf Gebieten

- J.P. Antoine 1996
  stetige Wavelet–Transformation auf Sphären

Definition. *i)* $\{\psi_i\}_{i\in I}$, $\psi_i \in L_2(\mathbb{R}^d)$, *heißt eine Familie von (orthonormalen Mother) Wavelets* $\Longleftrightarrow$

$$\psi_{i,j,k}(x) := 2^{dj/2}\psi_i(2^j x - k), \quad i \in I,\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}^d, \tag{1}$$

eine ONB des $L_2(\mathbb{R}^d)$ *bilden,*

$$\langle \psi_{i,j,k}, \psi_{i',j',k'} \rangle = \delta_{i,i'}\delta_{j,j'}\delta_{k,k'}. \tag{2}$$

Das System

$$\Psi = \{\psi_{i,j,k},\ i \in I,\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}^d\} \tag{3}$$

heißt Wavelet–Basis.
ii) Ein System Ψ *der Form* (**??**),(**??**) *heißt Prä–Wavelet–Basis* $\Longleftrightarrow$

$$\langle \psi_{i,j,k}, \psi_{i',j',k'} \rangle = 0 \qquad \text{für } j \neq j', \tag{4}$$

ℓ_2*–stabil für* $j = j'$, *d.h.*

$$\begin{aligned} C_1 \sum_{i\in I} \|\{c_{i,j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}^d}\|_{\ell_2}^2 &\leq \| \sum_{i\in I, k\in\mathbb{Z}^d} c_{i,j,k}\psi_{i,j,k}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &\leq C_2 \sum_{i\in I} \|\{c_{i,j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}^d}\|_{\ell_2}^2 \quad (5) \\ \|\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}\|_{\ell_2} &:= (\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |c_k|^2)^{1/2} \quad (6) \end{aligned}$$

iii) Zwei Systeme $\Psi, \tilde{\Psi}$ *der Form* (**??**),(**??**) *heißen Biorthogonale Wavelet–Basis* $\Longleftrightarrow$

$$\langle \psi_{i,j,k}, \tilde{\psi}_{i',j',k'} \rangle = \delta_{i,i'}\delta_{j,j'}\delta_{k,k'}. \tag{7}$$

Literatur:

- Yves Meyer: *Wavelets and Operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **37**, Cambridge 1992.

- Charles K. Chui: *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, Boston 1992.

- Ingrid Daubechies: *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS–NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, **61**, SIAM, Philadelphia 1992.

- Alfred Louis, Peter Maass und Andreas Rieder, *Wavelets: Theorie und Anwendungen*, Teubner, Stuttgart, 1994.

- Gilbert Walter, *Wavelets and Other Orthogonal Systems with Applications*, CRC Press 1994.

- Albert Cohen und Robert Ryan, *Wavelets and Multiscale Signal Processing*, Chapman & Hall, 1995.

- Martin Vetterli und Jelena Kovačević, *Wavelets and Subband Coding*, Prentice Hall, 1995.

- Mathias Holschneider, *Wavelets: An Analysis Tool*, Oxford University Press, Oxford 1995

- Jean–Pierre Kahane und Pierre–Gilles Lemarié–Rieusset, *Fourier Series and Wavelets*, Gordon and Breach Science Publishers, Luxembourg, 1995.

- Mladen Wickerhauser, *Adaptive Wavelet–Analysis*, Vieweg, 1996.

- Wolfgang Dahmen: *Wavelets and Multiscale Methods for Operator Equations*, Acta Numerica **6**, Cambridge University Press, Cambridge 1997.

- P. Wojtaszczyk: *A Mathematical Introduction to Wavelets*, Cambridge University Press, Cambridge 1997.

- Stephane Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press 1998.

- C. Blatter, *Wavelets – Eine Einführung*, Advanced Lectures in Mathematics, Vieweg, 1998.

Anwendungen:

- Signalanalyse/Datenkompression
- Numerik von Operatorgleichungen (Vorkonditionierung, Matrixkompression, Adaptivität)
- Geophysik
- Meteorologie
- Astrophysik
- Tomographie, inverse Probleme

2 Multiresolution Analysis

2.1 Definition und Beispiele

S. Mallat, Motivation: Signalanalyse, mathematisches Modell einer "scaling transform" T_r, Abbildung, die einem "Signal" f mit "endlicher Energie", $f \in L_2(\mathbb{R})$, eine "Approximation" $T_r(f)$ mit "Auflösung" r zuordnet

Vernünftigkeitsforderungen an T_r:

- $r = q^j, \; q = 2$

- T_{2^j} linear, $T_{2^j}^2(f) = T_{2^j}(f) \Longrightarrow$
  $T_{2^j} \longleftrightarrow$ Projektor auf $V_j \subset L_2(\mathbb{R})$

- Kausalitätsprinzip, feine Auflösung bestimmt grobe Auflösung $\Longrightarrow V_j \subset V_{j+1}$

- keine bevorzugte Auflösung $\Longrightarrow$
  $g(x) \in V_j \Longleftrightarrow g(2x) \in V_{j+1}$

- Auflösung 2^j benötigt 2^j Daten pro Längeneinheit $\Longrightarrow \exists$ Isomorphismus $\mathcal{I} \;: V_0 \longrightarrow \ell_2(\mathbb{Z})$

- Translationsinvarianz, Approximation des verschobenen Signals $\hat{=}$ verschobene Approximation des ursprünglichen Signals, $\Longrightarrow$

$$T_0 f(x) = g(x) \Longleftrightarrow T_0(f(x-k)) = g(x-k)$$

$$\mathcal{I}(g(x)) = \{\lambda_l\}_{l\in\mathbb{Z}} \Longleftrightarrow \mathcal{I}(g(x-k)) = \{\lambda_{l-k}\}_{l\in\mathbb{Z}}$$

- $j \longrightarrow \infty \Longrightarrow T_{2^j} f \longrightarrow f$
  $j \longrightarrow -\infty \Longrightarrow T_{2^j} f \longrightarrow 0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \overline{\bigcup_{-\infty}^{\infty} V_j} = L_2(\mathbb{R}), \qquad \bigcap_{-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}$$

Definition 1. *Unter einer Multiresolution Analysis (M.R.A.) des $L_2(\mathbb{R}^d)$ versteht man eine Folge $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ von abgeschlossenen Unterräumen des $L_2(\mathbb{R}^d)$ mit*

$$\subset V_{j-1} \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \dots \tag{8}$$

$$\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty}} V_j = L_2(\mathbb{R}^d) \tag{9}$$

$$\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\} \tag{10}$$

$$f(\cdot) \in V_j \Longleftrightarrow f(2\cdot) \in V_{j+1} \tag{11}$$

$$f(\cdot) \in V_0 \Longleftrightarrow f(\cdot - k) \in V_0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}^d \tag{12}$$

$$\exists\, \varphi \in V_0 \text{ mit } V_0 := \overline{\text{span}\{\varphi(\cdot - k),\ k \in \mathbb{Z}^d\}} \tag{13}$$

$$C_3||\lambda||_{\ell_2} \le || \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \lambda_k\, \varphi(\cdot - k)||_{L_2} \le C_4||\lambda||_{\ell_2} \tag{14}$$

φ: *Generator der Multiresolution Analysis*

Ziel: Finde Familie $\{\psi_i\}_{i\in I}$ mit

$$
\begin{aligned}
W_0 &= \overline{\operatorname{span}\{\psi_i(\cdot - k) \mid k \in \mathbb{Z}^d, i \in I\}} \\
V_1 &= V_0 \oplus W_0,\ V_0 \perp W_0,\quad \langle \psi_i(\cdot), \psi_{i'}(\cdot - k)\rangle = \delta_{i,i'}\delta_{0,k}, \\
W_j &:= \{f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d) | f(2^{-j}\cdot) \in W_0\}, \\
W_j &= \overline{\operatorname{span}\{2^{jd/2}\psi_i(2^j \cdot - k) \mid k \in \mathbb{Z}^d, i \in I\}}
\end{aligned}
$$

(**??**), $f(x) \in V_j \Longleftrightarrow f(2x) \in V_{j+1} \Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
V_{j+1} &= V_j \oplus W_j, \qquad\qquad V_j \perp W_j \\
V_{j+1} &= V_{j-1} \oplus W_{j-1} \oplus W_j \\
\vdots \quad & \quad \vdots \quad\quad \vdots \\
V_{j+1} &= V_{-J} \oplus W_{-J} \oplus W_{-J+1} \oplus \cdots \oplus W_j,
\end{aligned}
$$

(**??**), (**??**), $\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j} = L_2(\mathbb{R}^d)$, $\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}, \Rightarrow$

$L_2(\mathbb{R}^d) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j \quad \Longrightarrow$

$$
\psi_{i,j,k}(x) = 2^{dj/2}\psi_i(2^j x - k), \quad i \in I, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d,
$$

ist Wavelet–Basis! Wavelets beschreiben die von Skala j zu Skala $j+1$ hinzukommende Detailinformation!

(??),(??) $\Longrightarrow$

$$V_j = \overline{\text{span}\{\varphi(2^j \cdot -k) \mid k \in \mathbb{Z}^d\}} \Longrightarrow$$

$$\psi_i(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} b_l^i \varphi(2x - l)$$

Aufgabe: Bestimme die Koeffizienten b_l^i !

(??), (??), (??), (??) $\Longrightarrow$

$\varphi \in V_0 \subset V_1 = \overline{\text{span}\{\varphi(2 \cdot -k) \mid k \in \mathbb{Z}^d\}} \Longrightarrow$

φ ist verfeinerbare Funktion,

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k \varphi(2x - k), \quad \mathbf{a} = \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d} \in \ell_2(\mathbb{Z}^d),$$

$$a(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k z^k, \quad z = (z_1, \ldots, z_d), \ |z_i| = 1$$

$\mathbf{a} = \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ heißt Maske von φ

$a(z)$ heißt Symbol von φ

Fourier–Trafo, $z = e^{-i\xi} = (e^{-i\xi_1}, \ldots, e^{-i\xi_d}) \Longrightarrow$

$$\hat{\varphi}(\xi) = 2^{-d} a(e^{-i\xi/2}) \hat{\varphi}(\xi/2)$$

Algorithmus zur Konstruktion von M.R.A.'s

- Gegeben $\mathbf{a} = \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d} \in \ell_2(\mathbb{Z}^d)$;
- finde φ mit
$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k \varphi(2x - k);$$
- setze
$$V_0 = \overline{\operatorname{span}\{\varphi(\cdot - k),\ k \in \mathbb{Z}^d\}};$$
- setze
$$V_j := \{f \mid f(x) = g(2^j x),\ g \in V_0\}.$$

Beispiel 1.

$$V_0 = \{f \in L_2(I\!R) : \operatorname{supp} \hat{f} \subset [-\pi, \pi]\}$$

$$f \in V_j \Longleftrightarrow f(x) = g(2^j x), \quad g \in V_0.$$

$\{V_j\}_{j \in Z\!\!Z}$ ist M.R.A.!

$\widehat{g(2^j \cdot)}(\xi) = 2^{-j} \hat{g}(2^{-j} \xi) \Longrightarrow$

$f \in V_j \Longleftrightarrow \operatorname{supp} \hat{f} \subset [-2^j \pi, 2^j \pi] \Longrightarrow$

$V_j \subset V_{j+1}$ etc.

Beispiel 2. M.R.A. mit kardinalen B–Splines

Definition 2.

$$N_m(x) := \int_0^1 N_{m-1}(x - t) dt$$

mit

$$N_1(x) := \chi_{[0,1)}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

heißt kardinaler B–Spline der Ordnung m.

Theorem 1.

$$N_m \text{ ist stückweises Polynom vom Grad } m-1;$$

$$N_m \geq 0;$$

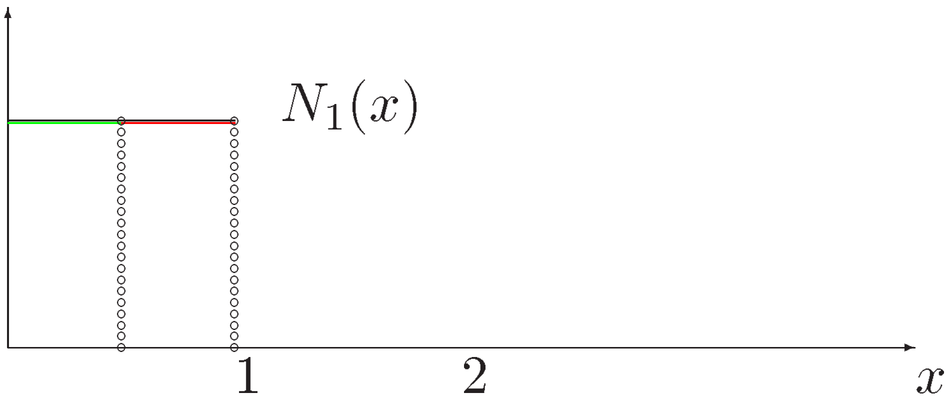
$$\text{supp } N_m \subset [0, m];$$

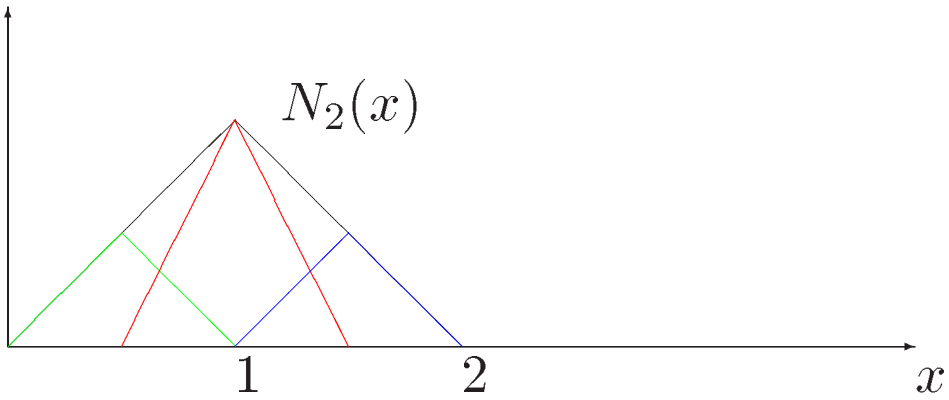
$$N_m \in C^{m-2}, \ m \geq 2;$$

$$N_m(x) = 2^{1-m} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} N_m(2x-k); \tag{15}$$

$$a(z) = 2^{1-m}(1+z)^m. \tag{16}$$

(??),**(??)** $\Longrightarrow$ N_m ist verfeinerbare Funktion! N_m ist Generator einer M.R.A.





2.2 Die Räume $\mathcal{L}_2$ und $\mathcal{E}_2$, Orthogonalität

$$
\begin{aligned}
f^0 &:= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |f(\cdot - k)| \\
|f|_2 &:= \|f^0\|_{L_2([0,1)^d)} = \left(\int_{[0,1)^d} |f^0|^2 dx\right)^{1/2} \\
\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^d) &:= \{f \mid |f|_2 < \infty\} \\
f \in \mathcal{E}_2(\mathbb{R}^d) &\iff \|f(\cdot + k)\|_{L_2([0,1)^d)} \le C_5 q^{|k|} \\
&\qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}^d,\ 0 < q < 1
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{E}_2 \quad \subset \quad \mathcal{L}_2 \quad \subset \quad L_2
$$

Theorem 2. *Sei* $\varphi \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^d)$ *verfeinerbar,* $\mathbf{a} \in \ell_1(\mathbb{Z}^d), \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k| < \infty$, *Translate* ℓ_2*–stabil* $\Longrightarrow \varphi$ *ist Generator einer M.R.A.*

Theorem 3. $\varphi \in \mathcal{E}_2$ *Generator einer M.R.A.* $\Longrightarrow$

$$
\hat{\phi}(\xi) \quad := \quad \frac{\hat{\varphi}(\xi)}{(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\hat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2)^{1/2}}
$$

ist Generator derselben M.R.A., $\phi \in \mathcal{E}_2$,

$$
\langle \phi(\cdot), \phi(\cdot - k)\rangle \quad = \quad \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\overline{\phi(x-k)}dx = \delta_{0,k}.
$$

3. Konstruktion von Wavelets

3.1 Orthonormale Wavelets im $L_2(\mathbb{R})$

Theorem 4. $\phi \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ $(\mathcal{E}_2(\mathbb{R}))$ *Generator einer M.R.A.* $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{a} \in \ell_1(\mathbb{Z})$, $\langle \phi(\cdot), \phi(\cdot - k)\rangle = \delta_{0,k}$.

$$\begin{aligned}
\psi(x) &:= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k \overline{a_{1-k}}\phi(2x-k) =: \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k \phi(2x-k) \\
\hat{\psi}(\xi) &= \frac{1}{2} b(z)\hat{\phi}(\xi/2) = -\frac{1}{2} z\overline{a(-z)}\hat{\phi}(\xi/2) \qquad (17) \\
b(z) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k z^k \quad \Longrightarrow
\end{aligned}$$

i.) $\langle \psi(\cdot), \psi(\cdot - k)\rangle = \delta_{0,k}, W_0 = \overline{\text{span}\{\psi(\cdot - k) \mid k \in \mathbb{Z}\}}$,
erfüllt $V_1 = V_0 \oplus W_0$, *und* $W_0 \perp V_0$;

ii.) $\{2^{j/2}\psi(2^j \cdot -k)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ *ist ONB des* $L_2(\mathbb{R})$;

iii.) $\psi \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}) \quad (\mathcal{E}_2(\mathbb{R}))$.

Beweisskizze:

i), **(??)** $\Longrightarrow$ ii), iii)

i) zu zeigen:

$$\mathcal{A}(z) \quad = \quad \frac{1}{2}\left(\begin{array}{cc} a(z) & a(-z) \\ b(z) & b(-z) \end{array}\right) \tag{18}$$

ist unitär, d.h. $\mathcal{A}(z)\overline{\mathcal{A}(z)^T} = E$

$$\langle\phi(\cdot), \phi(\cdot - k)\rangle = \delta_{0,k} \Rightarrow |a(z)|^2 + |a(-z)|^2 = 4 \tag{19}$$

(CQF–Bedingung) **(??)**, **(??)** $\Longrightarrow$ **(??)** erfüllt

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}(z)\overline{\mathcal{A}(z)^T} \\ &= \frac{1}{4}\left(\begin{array}{cc} a(z) & a(-z) \\ -z\overline{a(-z)} & z\overline{a(z)} \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} \overline{a(z)} & -z^{-1}a(-z) \\ \overline{a(-z)} & z^{-1}a(z) \end{array}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\begin{array}{cc} |a(z)|^2 + |a(-z)|^2 & 0 \\ 0 & |a(z)|^2 + |a(-z)|^2 \end{array}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\begin{array}{cc} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{array}\right) = E \end{aligned}$$

a.) $\langle\psi(\cdot), \phi(\cdot - k)\rangle = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{Z};$

b.) $\langle\psi(\cdot), \psi(\cdot - k)\rangle = \delta_{0,k}, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z};$

c.) $V_1 = V_0 \oplus W_0.$

nur a.)

$$\langle \psi(\cdot), \phi(\cdot - k)\rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle \hat{\psi}(\cdot), \widehat{\phi(\cdot - k)}\rangle = 0$$

$$\begin{aligned}
&\langle \hat{\psi}(\cdot), \widehat{\phi(\cdot - k)}\rangle \\
&= \int_{I\!R} \hat{\psi}(\xi)\overline{\hat{\phi}(\xi)}e^{ik\xi}\,d\xi \\
&= \int_{I\!R} \frac{1}{2}b(z)\frac{1}{2}\overline{a(z)}e^{ik\xi}\left|\hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right)\right|^2 d\xi, \quad z = e^{-i\xi/2}, \\
&= \frac{1}{4}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\int_{[0,4\pi)+4\pi l} e^{ik\xi}b(z)\overline{a(z)}\left|\hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right)\right|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{4}\int_{[0,4\pi)} e^{ik\xi}b(z)\overline{a(z)}\underbrace{\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left|\hat{\phi}\left(\frac{\xi+4\pi l}{2}\right)\right|^2}_{=1} d\xi \\
&= \frac{1}{4}\left[\int_{[0,2\pi)} e^{ik\xi}b(z)\overline{a(z)}\,d\xi + \int_{(2\pi,4\pi)} e^{ik\xi}b(z)\overline{a(z)}\,d\xi\right] \\
&= \frac{1}{4}\int_{[0,2\pi)} e^{ik\xi}\left[b(z)\overline{a(z)} + b(-z)\overline{a(-z)}\right] d\xi \\
&= 0
\end{aligned}$$

Algorithmus:

- Finde $\varphi \in \mathcal{E}_2(\mathbb{R}^d)$ verfeinerbar, $\mathbf{a} \in \ell_1(\mathbb{Z})$, ℓ_2–stabile Translate,

- gehe über zu

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{\hat{\varphi}(\xi)}{\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2\right)^{1/2}};$$

- bestimme das zu ϕ gehörende Symbol $\tilde{a}(z) = 2\hat{\phi}(\xi)/\hat{\phi}(\xi/2)$;

- berechne $b(z)$ und $\hat{\psi}(\xi) = \frac{1}{2}b(z)\hat{\phi}(\xi/2)$.

Beispiel 3. B–Spline Wavelets für N_2. $N_2 \in \mathcal{E}_2$, $N_2 \rightsquigarrow \tilde{N}_2(x) := N_2(x+1)$

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(\xi) &:= \frac{\hat{\tilde{N}}_2(\xi)}{(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\tilde{N}}_2(\xi + 2\pi k)|^2)^{1/2}} \\
&= \left(\frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2}\right)^2 \frac{1}{(1 - \frac{2}{3}\sin^2(\xi/2))^{1/2}}
\end{aligned}$$

$$\tilde{a}(z) = 2\cos^2(\xi/4)\frac{(1 - \frac{2}{3}\sin^2(\xi/4))^{1/2}}{(1 - \frac{2}{3}\sin^2(\xi/2))^{1/2}}$$

$$\hat{\psi}(\xi) = \frac{1}{2}b(z)\hat{\varphi}(\xi/2)$$

$$= -e^{-i\xi/2}\sin^2\left(\frac{\xi}{4}\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{\xi}{4}\right)}{\frac{\xi}{4}}\right)^2\left(\frac{1-\frac{2}{3}\cos^2\left(\frac{\xi}{4}\right)}{1-\frac{2}{3}\sin^2\left(\frac{\xi}{4}\right)}\right)^{1/2}$$

$$\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)^{-1/2}$$

3.2 Wavelets mit beschränktem Träger

Problem: supp φ beschränkt $\not\Longrightarrow$ supp ϕ beschränkt

Theorem 5. $\exists\ \psi^N,\ \phi^N \in C^{\beta N}(I\!R)$, *supp* $\psi^N = [-(N-1), N]$, *supp* $\phi^N = [0, 2N-1]$, *und* $\langle \phi^N(\cdot), \phi^N(\cdot - k)\rangle = \delta_{0,k}$.

3.3 Prä–Wavelets

- Nachteil: keine volle Orthonormalität (Parseval etc.)
- Vorteil: schwächere Bedingung, beschränkter Träger bleibt erhalten, keine Orthonormalisierung
- Aufgabe: finde $b(z)$ derart, daß

  $$\mathcal{A}(z) \quad = \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a(z) & a(-z) \\ b(z) & b(-z) \end{pmatrix}$$

  nichtsingulär ist

Beispiel 4. B–Spline Prä–Wavelets für N_2

$$\psi(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k N_2(2x-k)$$

$$b(z) = 2\left(\frac{1-z}{2}\right)^2 \sum_{l=0}^{2} N_4(l+1)(-z)^l$$

3.4 Biorthogonale Wavelets

2 Systeme Ψ, $\tilde{\Psi}$

$$\langle \psi_{i,j,k}, \tilde{\psi}_{i',j',k'} \rangle = \delta_{i,i'}\delta_{j,j'}\delta_{k,k'}$$

- Flexibilität
- beschränkter Träger bleibt erhalten
- Berechnungen analog zu orthonormalen Wavelets

$$f = \sum_{i,j,k} \langle f, \tilde{\psi}_{i,j,k} \rangle \psi_{i,j,k} = \sum_{i',j',k'} \langle f, \psi_{i',j',k'} \rangle \tilde{\psi}_{i',j',k'}$$

2 M.R.A.'s $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\{\tilde V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$

$$V_0 \perp \tilde W_0, \quad \tilde V_0 \perp W_0, \quad V_0 \oplus W_0 = V_1, \quad \tilde V_0 \oplus \tilde W_0 = \tilde V_0$$

$$\langle \varphi(\cdot), \tilde\varphi(\cdot - k)\rangle = \delta_{0,k}, \qquad k \in \mathbb{Z}^d \tag{20}$$

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k \varphi(2x-k), \qquad \tilde\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} d_k \tilde\varphi(2x-k)$$

$d = 1$:

Theorem 6. *φ, $\tilde\varphi \in \mathcal{L}_2$, verfeinerbar, $\mathbf{a}, \mathbf{d} \in \ell_1(\mathbb{Z})$, Generatoren von M.R.A.'s, ℓ_2–stabil , (**??**) erfüllt* $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\psi(x) &:= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k \overline{d_{1-k}} \varphi(2x-k) \\
\hat\psi(x) &:= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k \overline{a_{1-k}} \tilde\varphi(2x-k)
\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}
\hat\psi(\xi) &= -\frac{z}{2}\overline{c(-z)}\hat\varphi(\xi/2) \\
\hat{\tilde\psi}(\xi) &= -\frac{z}{2}\overline{a(-z)}\hat{\tilde\varphi}(\xi/2)
\end{aligned}$$

induzieren biorthogonale Wavelet–Basis.

3.5 Wavelets im $L_2(\mathbb{R}^d)$

man benötigt $2^d - 1$ Mother Wavelets!

eine Möglichkeit: Tensorprodukte

Theorem 7. *ϕ, ψ entsprechend Theorem* **??** *gewählt* $e \in \{0,1\}^d,\ e \neq (0,\ldots,0) \Longrightarrow$

$$\psi^e(x_1,\ldots,x_d) = \psi^{e_1}(x_1)\psi^{e_2}(x_2)\cdots\psi^{e_d}(x_d)$$

$$\psi^{e_i}(x_i) = \begin{cases} \varphi(x_i), & e_i = 0 \\ \psi(x_i), & e_i = 1 \end{cases}$$

ist Familie von orthonormalen (Mother) Wavelets im $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Beispiel: $d = 2 \implies$

$$\{\phi(x)\psi(y),\ \psi(x)\phi(y),\ \psi(x)\psi(y)\}$$

ist Familie von Wavelets!

$$V_0 = \overline{\text{span}\{\phi(x-k)\phi(y-l) \mid k, l \in \mathbb{Z}\}}$$

allgemein: finde $b^e(z),\ e \in \{0,1\}^d, e \neq 0$, so daß

$$\mathcal{A}(z) = 2^{-d} \begin{pmatrix} a(z) & a((-1)^{e_1} z) & \dots & a((-1)^{e_{2^d-1}} z) \\ b^{e_1}(z) & b^{e_1}((-1)^{e_1} z) & \dots & b^{e_1}((-1)^{e_{2^d-1}} z) \\ \vdots & & & \vdots \\ b^{e_{2^d-1}}(z) & b^{e_{2^d-1}}((-1)^{e_1} z) & \dots & b^{e_{2^d-1}}((-1)^{e_{2^d-1}} z) \end{pmatrix}$$

$$b((-1)^\epsilon z) := b((-1)^{\epsilon_1} z_1, \dots, (-1)^{\epsilon_d} z_d)$$

unitär bzw. nichtsingulär ist. Dies ist nichttrivial!

noch allgemeiner: Skalierungsmatrizen

$$\psi_{i,j,k}(x) := |\det M|^{j/2} \psi_i(M^j x - k),$$

M ganzzahlig, expandierend, d.h. $|\lambda| > 1$, λ EW von M

4. Welche Eigenschaften haben Wavelets und M.R.A.'s?

4.1 Reproduktion von Polynomen

$\varphi \in C_0^r(I\!R^d) := \{g \mid g \in C^r(I\!R^d)$ und supp g beschränkt$\} \Longrightarrow$

$$x^\alpha = \sum_{k \in Z\!\!Z^d} c_k^\alpha \varphi(x-k), \quad |\alpha| \le r$$

4.2 Oszillation

Reproduktion von Polynomen $\longrightarrow$ verschwindende Momente $\longrightarrow$ Oszillationen

Theorem 8. *Sei $\varphi \in C_0^r(I\!R^d)$, ψ_i Prä–Wavelet supp ψ_i beschränkt $\Longrightarrow$*

$$\int_{I\!R} x^\alpha \psi(x) dx \quad = \quad 0 \qquad \textit{für} \quad 0 \le |\alpha| \le r.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \int_{I\!R^d} x^\alpha \overline{\psi_i(x)} dx &= \int_{I\!R^d} \sum_{k \in Z\!\!Z^d} c_k^\alpha \varphi(x-k) \overline{\psi_i(x)} dx \\ &= \sum_{k \in Z\!\!Z^d} c_k^\alpha \underbrace{\langle \varphi(\cdot - k), \psi_i(\cdot) \rangle}_{=0!} \\ &= 0 \end{aligned}$$

4.3 Approximation

$f \in L_2(\mathbb{R}^d)$, $v = \partial^\gamma f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ heißt schwache Ableitung von f, falls

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)v(x)dx = (-1)^{|\gamma|} \int_{\mathbb{R}^d} \partial^\gamma g(x) f(x) dx \quad \forall\, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$$

Der Raum

$$H^r := \{f \mid f \text{ besitzt schwache Ableitung } \partial^\gamma f,\ |\gamma| \le r\}$$

heißt Sobolev–Raum, $|f|_{H^r} := (\sum_{|\gamma|\le r} \|\partial^\gamma f\|_{L_2}^2)^{1/2}$

Theorem 9. *φ Generator einer M.R.A., $\varphi \in C_0^r(\mathbb{R}^d)$, $f \in H^r \Longrightarrow$ Jackson–Ungleichung*

$$\inf_{g\in V_j} \|f-g\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le C_6 2^{-jr} |f|_{H^r}.$$

4.4 Regularität

- Wie findet man zu $\mathbf{a} = \{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ verfeinerbare Funktion?
- Wie kann Regularität abgeschätzt werden?

f "glatt" $\Longleftrightarrow$ $\hat{f}$ "schnell abfallend"

Idee: Finde Darstellung von $\hat{\varphi}$, zeige: $\hat{\varphi}$ schnell abfallend

$$
\begin{aligned}
\hat{\varphi}(\xi) &= 2^{-d}a(e^{-i\xi/2})\hat{\varphi}(\xi/2)\\
\hat{\varphi}(\xi) &= 2^{-d}a(e^{-i\xi/2})2^{-d}a(e^{-i\xi/4})\hat{\varphi}(\xi/4)\\
\vdots &= \vdots \qquad \vdots\\
\hat{\varphi}(\xi) &= \prod_{j=1}^{\infty}\frac{a(e^{-i2^{-j}\xi})}{2^d}\hat{\varphi}(0).
\end{aligned}
$$

Theorem 10. *(d=1)* $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|a_k||k|^{\epsilon}<\infty$,

$$
\begin{aligned}
a(z) &= (1+z)^M Q(z) \quad \sup_{|z|=1}|Q(z)|\le 2^{-m} \Longrightarrow\\
|\hat{\varphi}(\xi)| &\le C_8(1+|\xi|)^{-1-m-\varepsilon}, \quad \textit{d.h.} \quad \varphi\in C^m(\mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

$(1+z)^M$ "schöne" Teil, $Q(z)$ "häßliche" Teil

Wegen (**??**) besitzt das zugehörige Wavelet dann offenbar dieselbe Regularität!

Theorem 11. *Sei φ Generator einer M.R.A., $\varphi\in C^r(\mathbb{R}^d)$, supp φ beschränkt $\Longrightarrow$ Bernstein–Ungleichung*

$$
|f|_{H^r} \le C_9 2^{jr}\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad f\in V_j
$$

4.5 Wavelets und Funktionenräume

$$f = \sum_{i \in I, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d} c_{i,j,k} \psi_{i,j,k}$$

Regularität von $f \longleftrightarrow$ Abfall der $c_{i,j,k}$!

Theorem 12. *φ Generator einer M.R.A., supp φ beschränkt, $\varphi \in C^r(\mathbb{R}^d)$. Sei weiter Ψ ein zugehöriges Prä–Wavelet–System $\Longrightarrow$*

$$f \in H^s \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{2js} \sum_{i \in I, k \in \mathbb{Z}^d} |c_{i,j,k}|^2 < \infty, \quad s < r.$$