27. April 2010

Prof. Dr. R. Loogen, M. Dieterle
Fachbereich Mathematik und Informatik
Hans-Meerwein-Straße
D-35032 Marburg

Philipps Universität Marburg

Übungen zu „Semantik von Programmiersprachen“, Sommer 2010

Nr. 3, Abgabe der Aufgaben: 04. Mai 2010 vor der Vorlesung

Aufgaben

3.1 **Induktionsprinzipien** 4 Punkte

Sei Δ ein Alphabet (d.h. eine endliche, nicht-leere Menge). Eine Zeichenkette über Δ ist eine Folge $a_1 \dots a_n$ von Symbolen $a_j \in \Delta$ mit $0 \leq j \leq n, n \geq 0$. Die Anzahl n der Symbole einer Zeichenkette bezeichnet man als Länge der Zeichenkette. Die leere Zeichenkette hat die Länge 0. Zwei Zeichenketten u und v können zu der Zeichenkette uv konkateniert werden.

> **Behauptung:** Es existiert keine Zeichenkette u, für die $au = ub$ mit zwei verschiedenen Symbolen a und b aus Δ.

Zeigen Sie diese Behauptung

(a) mittels vollständiger Induktion

(b) mittels einer (von der vollständigen Induktion verschiedenen) wohlfundierten Induktion

3.2 Beweisen Sie die **Vollständigkeit der Einzelschrittsemantik** bezüglich der Gesamtschrittsemantik: 3 Punkte

$$\forall c \in \mathbf{Cmd}\ \forall \sigma, \sigma' \in \Sigma : (c, \sigma) \to \sigma' \curvearrowright (c, \sigma) \Rightarrow^* \sigma'$$

Sie können das entsprechende Resultat für arithmetische und Boolesche Ausdrücke voraussetzen.

3.3 Regelinduktion

5 Punkte

Def. X sei eine beliebige Menge.
Ein Paar (A/x) mit einem Element $x \in X$ und einer endlichen Teilmenge $A \subseteq X, |A| < \infty$ heißt *Regelinstanz über X.*
x heißt *Folgerung*, die Elemente $a_i \in A$ *Voraussetzungen* der Regel.
Eine Menge von Regelinstanzen über X heißt *Regelsystem über X.*

Im folgenden sei X stets eine beliebige Menge und R ein Regelsystem über X.

Def. Eine Teilmenge $Q \subseteq X$ heißt *unter R abgeschlossen*, wenn gilt:

$$\forall (A/x) \in R : A \subseteq Q \curvearrowright x \in Q$$

(a) Bestimmen Sie für das Regelsystem / 0,5

$$R = \{(\{a\}/d), (\{b\}/a), (\{a, d\}/c), (\{d\}/a)\} \text{ über } X = \{a, b, c, d\}$$

alle unter R abgeschlossenen Teilmengen von X.

Def. Wir definieren eine Abbildung. $\hat{R} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$:

$$\hat{R}(Q) = \{x \in X \mid \exists Y \subseteq Q : (Y/x) \in R\}$$

$\hat{R}$ bestimmt also alle aus der Teilmenge Q *in einem Schritt* herleitbaren Elemente.

Wir betrachten speziell: $Q_0 = \emptyset$, $Q_{i+1} = \hat{R}(Q_i)$ für $i \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\hat{R}$ monoton bzgl. $\subseteq$ ist und folgern Sie $\forall i \in \mathbb{N} : Q_i \subseteq Q_{i+1}$. / 2

(c) Beweisen Sie: $Q = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i$ ist *kleinste unter R abgeschlossene Menge*, d.h.: / 2,5

i. Q ist unter R abgeschlossen

ii. $\forall Q' \subseteq X : (Q'$ unter R abgeschlossen $\curvearrowright Q \subseteq Q')$.