



## Übungen zur „Theoretischen Informatik“, Sommersemester 2011

Prof. Dr. R. Loogen, Dipl.-Inform. M. Dieterle · Fachbereich Mathematik und Informatik · Marburg

### Nr. 1, Abgabe: Dienstag, 19. April 2011 vor der Vorlesung

Die Lösungen müssen schriftlich abgegeben werden. Die Abgabe ist in Gruppen bis zu zwei Personen erlaubt.

#### 1. Komplexprodukt von Sprachen

5 Punkte

Seien  $\Sigma$  ein Alphabet und  $L, L' \subseteq \Sigma^*$  beliebige Sprachen über  $\Sigma$ . Wir betrachten die folgenden beiden Gleichungen:

$$(i) \quad L \cdot L = L \qquad (ii) \quad L \cdot L' = L' \cdot L$$

- (a) Zeigen Sie durch die Angabe jeweils eines Gegenbeispiels, dass die beiden Gleichungen im Allgemeinen nicht gelten. / 1
- (b) Beweisen Sie: Für beliebige  $L \subseteq \Sigma^*$  mit  $L \neq \emptyset$  gilt:  $L \cdot L = L \cup L = L^*$ . / 2
- (c) Beweisen Sie: Falls  $\Sigma$  einelementig ist, gilt für beliebige  $L, L' \subseteq \Sigma^*$ :  $L \cdot L' = L' \cdot L$ . / 2

#### 2. Wortfunktionen

5 Punkte

Sei  $\Sigma$  ein Alphabet. Die Funktionen  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  und  $f_a : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  seien für alle  $a \in \Sigma$  induktiv definiert durch

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) &:= \varepsilon & f_a(\varepsilon) &:= a \\ f(aw) &:= af_a(w) & f_a(bw) &:= \begin{cases} af_a(w) & \text{falls } a = b \\ abf_b(w) & \text{falls } a \neq b \end{cases} \end{aligned}$$

- (a) Was bewirkt  $f$ ? / 1
- (b) Zeigen Sie für alle  $w \in \Sigma^*$ :
- i.  $|f(w)| \geq |w|$ . / 2
- ii. Für  $w \neq \varepsilon$  beginnt  $f(w)$  mit einem Teilwort der Form  $aa$  für ein  $a \in \Sigma$ . / 2

*Hinweis:* Formulieren und zeigen Sie geeignete Hilfsaussagen für die Funktionen  $f_a$ .

#### 3. Grammatiken

2 Punkte

Welche Sprache wird durch die folgende Grammatik  $G$  erzeugt? Geben Sie eine Beispielableitung eines Wortes aus  $L(G)$  mit mindestens drei Buchstaben an.

$G = \langle \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}, \{a\}, P, S_0 \rangle$  mit

$$\begin{aligned} P : \quad S_0 &\rightarrow S_1 S_3 a S_2 \\ S_3 a &\rightarrow a a S_3 \\ S_3 S_2 &\rightarrow S_4 S_2 \mid S_5 \\ a S_4 &\rightarrow S_4 a \\ S_1 S_4 &\rightarrow S_1 S_3 \\ a S_5 &\rightarrow S_5 a \\ S_1 S_5 &\rightarrow \varepsilon \end{aligned}$$