Philipps Universität Marburg

Übungen zur „Theoretischen Informatik“, Sommersemester 2011

Prof. Dr. R. Loogen, M. Dieterle · Fachbereich Mathematik und Informatik · Marburg

Nr. 12 (letztes Blatt), Abgabe: Dienstag, 5. Juli 2011 vor der Vorlesung

31. **Primitiv rekursive Funktionen** — 4 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass sub aus den primitiv rekursiven Grundfunktionen durch Anwendung von Komposition und primitiver Rekursion erzeugt werden kann: / 2

$$\text{sub} : \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \to \mathbb{N} \\ (a,b) & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } a \leq b \\ a-b & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

(b) Sei $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv. / 2
Zeigen Sie, dass dann auch $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$h(x,y) = \sum_{z \leq y} \varphi(x,z)$$

(gemäß der Definition der primitiv rekursiven Funktionen) primitiv rekursiv ist.

32. **μ-Rekursion** — 6 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass die partielle arithmetische Division $div : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$ mit / 3

$$div(x,y) = \begin{cases} n & \text{falls } n \text{ minimal mit } n * y \leq x < (n+1) * y \\ \text{nicht definiert} & \text{falls } y = 0 \end{cases}$$

μ-rekursiv ist.

(b) Gegeben seien totale berechenbare Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. / 3
Sei $M := \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} : f(x) = g(y)\}$.
Zeigen Sie durch Angabe einer μ-rekursiven Funktion $h : \mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{N}$ mit Definitionsbereich M, dass M rekursiv aufzählbar ist.

33. **Semantik von WHILE** — 2 Punkte

Bestimmen Sie für das nebenstehende Programm P die Semantik $[\![P]\!]$ anhand der Semantik-Definition für WHILE-Programme:

```
P = in (X1, X2); var ( );
    while X2 ≠ 0 do
        X2 := X2 − 1;
        X1 := X1 + 1;
    od;
    out X1.
```

Bitte wenden!

Bonusaufgaben

34. Ackermann-Funktion

2 Punkte

Die Ackermann-Funktion ist definiert durch

$$
\begin{array}{lcll}
ack(0,0) & = & 1 & \\
ack(0,1) & = & 2 & \\
ack(0,y) & = & y+2 & (y \geq 2) \\
ack(x+1,0) & = & 1 & (x \geq 0) \\
ack(x+1,y+1) & = & ack(x, ack(x+1,y)) & (x \geq 0, y \geq 0)
\end{array}
$$

Zeigen Sie induktiv:

(a) $ack(1,y) = 2 * y$ für $y \geq 1$

(b) $ack(2,y) = 2^y$ für $y \geq 0$

35. Abschlusseigenschaften

4 Punkte

Zeigen Sie, dass mit $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ auch $L_1 \cup L_2, L_1 \cap L_2$ und $\Sigma^* \setminus L_1$ entscheidbar sind.

Gilt dies auch für semi-entscheidbare Sprachen?