

UNIVERSITÄT LEIPZIG
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK
INSTITUT FÜR INFORMATIK

Krümmungsbasierte Unterteilung der Hirnoberfläche

Diplomarbeit

Betreuer: Prof.Dr.D.Saupe, PD Dr.F.Kruggel

Leipzig, Juni 2002

vorgelegt von
Müller, Dirk
geb. am 06.01.1977
Studiengang Diplom Informatik

Zusammenfassung

Die neuartigen Möglichkeiten der Medizin- und Computertechnik, insbesondere nichtinvasive Bildgebungsverfahren wie CT und MRI in Verbindung mit leistungsfähigen interaktiven 3D-Grafik-Systemen, ermöglichen es uns, Schritt für Schritt einen immer tieferen Einblick in Aufbau und Funktionsweise des menschlichen Hirns zu bekommen. Auch wenn manche Projekte zunächst nur der Grundlagenforschung zugehörig erscheinen, existieren kurz- und mittelfristige Perspektiven der Anwendung von Verfahren der Bildverarbeitung in der Neuromedizin.

Diese Arbeit beschreibt und untersucht einige der bildverarbeitenden und statistisch-mathematischen Teilprozesse, die insgesamt einmal zur besseren Diagnose degenerativer Hirnerkrankungen, wie z.B. Morbus Alzheimer, beitragen können. Sie beschäftigt sich mit dem Schritt der Segmentation der Hirnoberfläche in Kronen- und Fundusregionen aus einer bereits vorliegenden Triangulierung der Hirnoberfläche. Das heutzutage im Bereich der Neuromedizin mit Abstand verbreitetste Verfahren der Kernspintomographie (MRT/MRI) liefert dreidimensionale Grauwert-Voxelbilder des Hirns, woraus man über verschiedene Algorithmen Dreiecksnetze als Näherungen von Isoflächen erhalten kann. In solchen rekonstruierten diskreten Netzen der Hirnoberfläche wird lokal ihre Krümmung, eingebettet in den allgemein bekannten stetigen Fall, durch verschiedene Schätzer bestimmt. Diese werden an analytischen Beispieloberflächen auf ihre Qualität getestet. Im nächsten Schritt erfolgt die Extraktion von Kamm- und Tal-Linien. Anhand deren Lage gelingt eine Unterteilung in Kronen- und Fundusregionen. Abschließend werden die erhaltenen Ergebnisse eingeschätzt.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich dem Max-Planck-Institut für neuropsychologische Forschung in Leipzig für die Möglichkeit der Nutzung von Rechentechnik und Software und insbesondere meinen Betreuern Prof.Dr.D.Saupe und PD Dr.F.Kruggel für die jederzeitige Beantwortung von Fragen danken.

Diese Arbeit wurde unter LyX , einem auf $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ basierendem System, erstellt. Die Abbildungen wurden mit dem Programm *IP*E aus dem *BRIAN*-Software-Paket, das auf der *Vista*-Bibliothek [PL1994] aufbaut, bzw. unter *Xfig* generiert und dann als Encapsulated-PostScript-Dateien (PostScript ist ein eingetragenes Warenzeichen der Adobe Systems Incorporated) eingebunden. Eigene Implementierungen sind in C/C++ geschriebene Erweiterungen von *BRIAN*. Die Suche nach Artikeln erfolgte weitgehend unter `citeseer.nj.nec.com`.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Einführung | 7 |
| 1.1 | Motivation und Zielsetzung | 7 |
| 1.2 | Überblick | 7 |
| 1.3 | Interne Darstellungsformen von 3D-Objekten | 8 |
| 1.4 | Anatomie des Hirns | 9 |
| 1.5 | Kernspintomographie | 10 |
| 1.5.1 | Physikalische Grundlagen: NMR | 11 |
| 1.5.2 | Relaxationszeiten T1 und T2 | 12 |
| 1.5.3 | Volumenselektion | 12 |
| 1.5.4 | Gesundheitsrisiken | 13 |
| 1.5.5 | Anwendung auf unser Projekt | 13 |
| 1.6 | Vorverarbeitung | 13 |
| 1.7 | 3D-Rekonstruktion von Isoflächen (Triangulierung) | 14 |
| 1.7.1 | Contour Linking | 14 |
| 1.7.2 | Marching Cubes und Modifikationen | 14 |
| 1.7.3 | Constrained Elastic Surface Nets | 15 |
| 1.7.4 | Vergleich der Verfahren | 15 |
| 1.8 | Degenerative Hirnerkrankungen | 16 |
| 2 | Das stetige Krümmungsmodell | 17 |
| 2.1 | Kurven in der Ebene | 17 |
| 2.2 | Flächen im Raum | 17 |
| 2.3 | Das Gauß-Bonnet-Theorem und die Integralkrümmung | 20 |
| 2.4 | Alternative Beschreibungen | 21 |
| 2.4.1 | Die mittlere Krümmung H | 21 |
| 2.4.2 | Die Integralkrümmung K_{ges} | 21 |
| 2.5 | Zusammenfassung | 22 |
| 3 | Diskrete Krümmungsmodelle | 23 |
| 3.1 | Einführung | 23 |
| 3.2 | Parkettierungen | 24 |
| 3.2.1 | Zerlegung eines Polygonzuges | 25 |
| 3.2.2 | Parkettierung einer Polyederoberfläche | 25 |
| 3.3 | Krümmung eines Polygons in der Ebene | 30 |
| 3.4 | Gaußsche Krümmung auf Polyederoberflächen | 30 |
| 3.5 | Mittlere Krümmung auf Polyederoberflächen | 32 |
| 3.5.1 | Ein Ansatz über die Mittlere-Krümmungs-Normale | 32 |
| 3.5.2 | Ein Ansatz über das Divergenztheorem | 34 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.6 | Krümmungsschätzung über lokale Regression | 34 |
| 4 | Güte der diskreten Schätzer | 37 |
| 4.1 | Einleitung | 37 |
| 4.2 | Würfel | 37 |
| 4.3 | Kugel | 39 |
| 4.4 | Zylinder | 41 |
| 4.5 | Zusammenfassung | 42 |
| 5 | Kamm- und Tal-Linien | 43 |
| 5.1 | Überblick | 43 |
| 5.2 | Wichtige Definitionen | 43 |
| 5.3 | Rauschverminderung durch Glätten | 44 |
| 5.4 | Ein robuster Algorithmus für Kamm- und Tal-Linien | 44 |
| 6 | Unterteilung | 47 |
| 6.1 | Einleitung | 47 |
| 6.2 | 2-Segmentation | 47 |
| 6.3 | 3-Segmentation | 48 |
| 7 | Ergebnisse | 49 |
| 7.1 | Beispielsegmentationen analytischer Oberflächen | 49 |
| 7.2 | Beispielsegmentationen von Hirnoberflächen | 51 |
| 7.3 | Einschätzung | 52 |

Abkürzungsverzeichnis

| | | |
|--------------|---------------------------------------|---|
| 1D, 2D, 3D | | ein-, zwei-, dreidimensional |
| <i>BRAIN</i> | BRain Image ANalysis | |
| CL | Contour Linking (algorithm) | |
| CSF | cerebrospinal fluid | Cerebrospinalflüssigkeit; Liquor (cerebrospinalis) |
| CT | computed tomography | rechnergestütztes schichtweises Röntgen |
| DiscMC | Discretized MC (algorithm) | |
| GM | grey matter | graue Substanz |
| <i>IPE</i> | Image Processing Environment | |
| HF | high frequency | Hochfrequenz- |
| MC | Marching Cubes (algorithm) | |
| MRI | magnetic resonance imaging | Bildgebung durch MRT |
| MRT | magnetic resonance tomograph(-y) | Kernspintomograph(-ie) |
| MT | Marching Tetrahedra (algorithm) | |
| NMR | nuclear magnetic resonance | |
| pixel | picture element | |
| RMT | Regularized MT (algorithm) | |
| SNG | SurfaceNet Gradient Based (algorithm) | |
| voxel | volume element | |
| <i>VRML</i> | Virtual Reality Modelling Language | |
| WM | white matter | weiße Substanz |
| ZNS | | Zentralnervensystem |

Kapitel 1

Einführung

1.1 Motivation und Zielsetzung

In letzter Zeit treten degenerative Hirnerkrankungen, wie z.B. Morbus Alzheimer, immer stärker auf. Die Krankheit gilt bis heute als unheilbar, nur ein Aufschub schwerer Symptome ist bisher machbar. Doch dafür ist eine frühzeitige zuverlässige Diagnose notwendig. Vor dem breiten klinischen Einsatz von Schichtaufnahmen (MR-Tomogrammen) seit den 1980er Jahren gab einzig eine Obduktion nach dem Tode die Chance einer Analyse der anatomischen Veränderungen im Hirn. Die erst um Jahre verzögert auftretenden klinischen Symptome machen eine Auswertung von MRI-Bilddaten zur Früherkennung notwendig.

Grundlage soll zunächst eine krümmungsbasierte Unterteilung der aus Schichtaufnahmen gewonnenen Hirnoberfläche in Fundus- und Kronenregionen sowie Wände sein. Mit einer solchen Klassifizierung lassen sich durch zu bestimmende Schnittebenen einzelne Windungsfurchen extrahieren. Bei diesen lässt sich jeweils das Verhältnis vom Volumen zur Krümmung bestimmen, was eine statistische Auswertung dieses Quotienten bezüglich verschiedener Stadien der Erkrankung ermöglicht. Bei ausreichender Korrelation dieser beiden Größen ließe sich im Umkehrschluss (evtl. verbunden mit Extrapolation aufgrund Datenmangels für frühe Stadien) auch die Anfangsphase der Erkrankung diagnostizieren.

1.2 Überblick

Für die im letzten Abschnitt als großes Ziel angegebene statistische Auswertung von Zeitreihen zur Entwicklung eines Patienten oder auch zum Vergleich innerhalb einer Patientengruppe muss es zuerst gelingen, aus dem sehr reichhaltigen Material einer MRI-Aufnahme möglichst wenige und zugleich charakteristische Parameter zu extrahieren. Dieses Vorgehen ist auch unter dem Schlagwort "getting numbers from images" [Kru2002], also dem Erhalt von Zahlen aus Bildern, geläufig. Man bedenke, dass übliche Kernspintomographen laut [WTVW1992] 3D-Bilder mit einer Auflösung von $128 \times 256 \times 256$ bei einer Grauwerttiefe von 12 Bit, also mit einer Größe von $2^7 * 2^8 * 2^8 * 12\text{Bit} = 12\text{MB}$ liefern. Eine dafür geeignete Prozesskette ist 1.1 in dargestellt.

Die Kernpunkte dieser Arbeit mit eigenen Kapiteln sind die lokale Krümmungsschätzung (Kapitel 2, 3 und 4) sowie die Segmentierung (Kapitel 5 und 6). Alle anderen

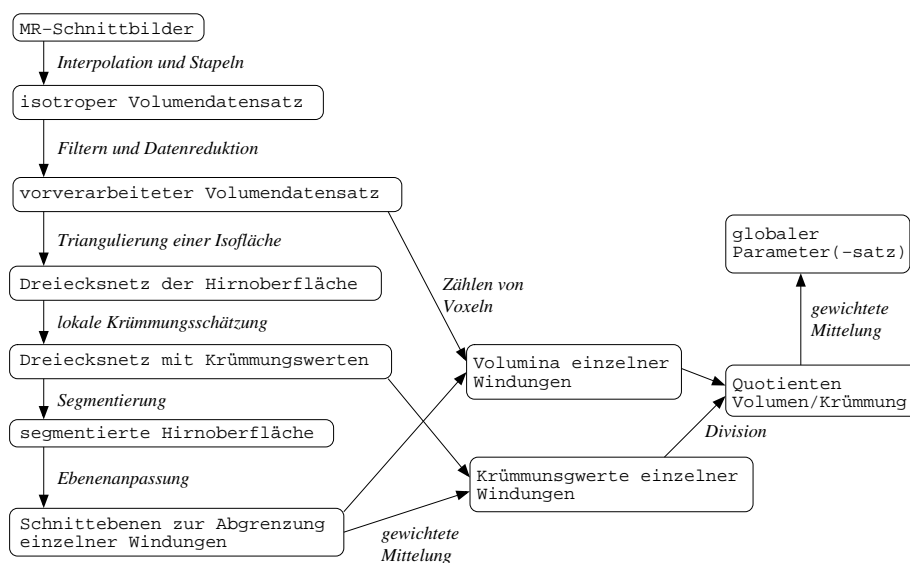


Abbildung 1.1: Prozesskette zur Parameterextraktion

Schritte werden zusammen mit wichtigen Grundlagen nur überblicksartig, beginnend im Abschnitt 1.6, innerhalb dieses Kapitels behandelt. Vorher erfolgen noch Kurzdarstellungen zu Grundlagen, die mir für das weitere Verständnis als wichtig erscheinen.

1.3 Interne Darstellungsformen von 3D-Objekten

Bei der Visualisierung und Verarbeitung von 3D-Objekten müssen diese immer auf eine bestimmte, genau definierte Art und Weise im Speicher des Rechners repräsentiert werden. Nach [WTVW1992] existieren prinzipiell drei verbreitete Möglichkeiten des *internen Modells*, dies zu bewerkstelligen:

1. Oberflächenmodell

Hier wird das Objekt durch seine Oberfläche beschrieben. Die häufigste Form ist deren Annäherung durch ebene Dreiecke. Ein Vorteil ist der geringere mathematische Aufwand, der für die Verarbeitung ebener Dreiecke im Vergleich zu gekrümmten Flächenstücken betrieben werden muss. Es ist immer nur eine Approximation des Objekts möglich. Mit einer hinreichend großen Anzahl verwendeter Dreiecke ist sie jedoch (theoretisch) beliebig genau möglich. Die praktischen Grenzen liegen in der Größe des Hauptspeichers und in der Verarbeitungsgeschwindigkeit der zur Verfügung stehenden Hardware.

Aus Sicht der Informatik sind ein Knotenfeld mit den Ortsvektoren (Koordinaten) der Stützstellen (Knoten) sowie ein Dreiecksfeld mit den jeweils drei Indizes der das jeweilige Dreieck bildenden Knoten notwendig. Oft erweitert man diese beiden elementaren Datenstrukturen durch Ergänzung von Nachbarschaftsrelationen zu zwei Graphen. Dies ist für viele Algorithmen ein großer Vorteil in Bezug auf die Suchkomplexität.

Dieses Modell soll für unsere Hirnoberfläche verwendet werden, so, wie es in *BRIAN* in der Klasse *mesh* implementiert ist.

2. Solids-Modell

Ein anderer Ansatz ist die Zerlegung des 3D-Objekts in elementargeometrische Körper (z.B. Kugel, Würfel, Zylinder, Kegel, Pyramide), so genannte *Solids*. Dann ist die passende Datenstruktur einfach eine Liste der Objekte, die jeweils durch eine bestimmte Zahl von Parametern bestimmt sind. Zusätzlich können auf sie Bewegungen (Verschiebung, Drehung, Spiegelung) sowie Ähnlichkeitsabbildungen angewandt werden. Ein Beispiel ist die 3D-Beschreibungssprache *VRML*.

3. Volumenmodell

Beschränkt man sich bei der Wahl der zugelassenen Solids ganz auf Quader, die zusätzlich noch in ein in den einzelnen drei Koordinaten jeweils äquidistantes 3D-Raster passen müssen, gelangt man zum Volumenmodell. Es stellt eine Entsprechung zur 2D-Rastergrafik dar. Die dort auftretenden Pixel heißen nun *Voxel*. Damit ist auch das Innere von Körpern repräsentierbar. Ein 3D-Feld ist die geeignete Datenstruktur. Mit der höchstmöglichen Einfachheit eines Voxels als Feldelement wird klar, dass eine vielfach größere Anzahl von Elementen nötig ist, um eine ähnlich genaue 3D-Objektbeschreibung wie bei 1. oder 2. zu erhalten.

In einer solchen Form kommen die Daten aus einem MRI-System.

1.4 Anatomie des Hirns

Das Hirn besitzt eine komplexe Struktur, deren umfassende Beschreibung weit über die Grenzen dieser Arbeit geht. Wir belassen es deshalb bei einer kurzen Darstellung des Grobausbaus, so dass verständlich wird, *was* zu unterteilen ist.

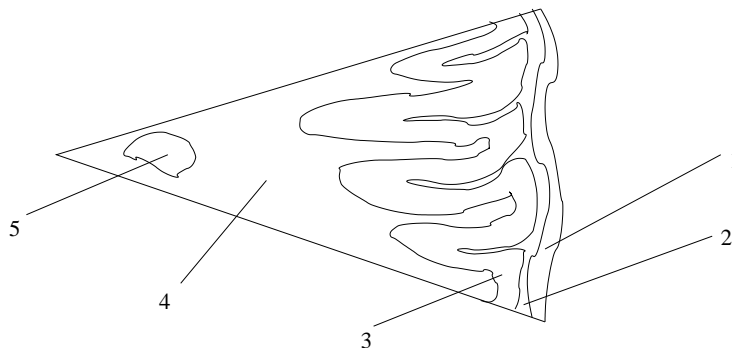


Abbildung 1.2: Grobstruktur des Gehirns einschließlich seiner Umgebung

- 1 Schädelknochen (mit Kopfhaut)
- 2 Schutzschicht aus Liquor (CSF)
- 3 graue Substanz (GM)
- 4 weiße Substanz (WM)
- 5 Ventrikel, mit Liquor gefüllt

Tabelle 1.1: Legende zu Abb.1.2

Die Abb.1.2 zeigt schematisch einen Sektor eines ebenen Schnittes durch das menschliche Hirn, welches hier in der Abstraktion als isotrop angenommen wird. Dies trifft in erster Näherung zu, nur die Fortsetzung des ZNS hin zum Rückenmark bildet eine nicht vernachlässigbare Ausnahme.

Als Hirnoberfläche wollen wir von nun an den Übergang zwischen grauer Substanz und äußerem Liquor bezeichnen. Dies entspricht der äußeren Zellschicht des Hirns, die als Hirnrinde bzw. Kortex bezeichnet wird. In der Nähe des Übergangs des Hirns in das Rückenmark wird einfach abgeschnitten, oft endet auch der Rohdatensatz in diesem Bereich.

1.5 Kernspintomographie

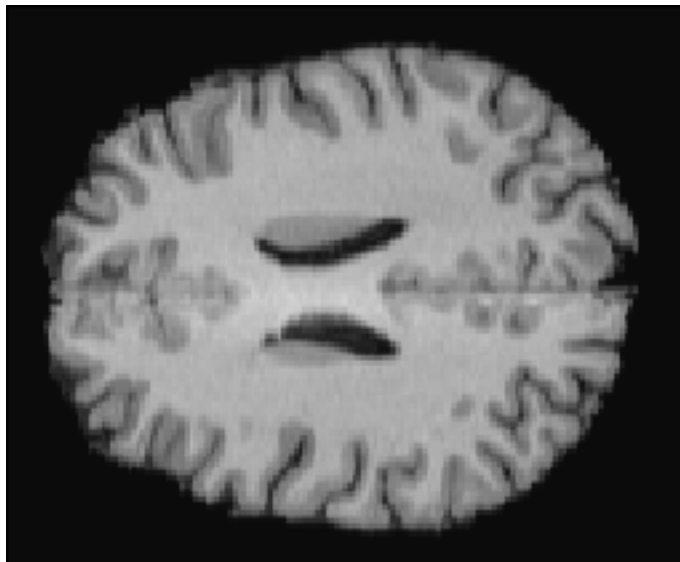


Abbildung 1.3: Kernspintomographie des Hirns: eine Schicht als 2D-Bild; Knochen und Liquor wurden bereits bildverarbeitungstechnisch entfernt

Das bildgebende Verfahren, das wir als Datenquelle nutzen wollen, ist die auf NMR basierende Kernspintomographie (MRI). Die Vorteile, insbesondere im Vergleich zu CT, sind [WTVW1992] die fehlende Strahlenbelastung¹ sowie ein besserer Kontrast zwischen grauer und weißer Substanz. Vor der theoretischen Fundierung 1973 durch *P.Lauterbur* und dem breiten klinischen Einsatz seit den 1980er Jahren waren NMR-Untersuchungen ein Werkzeug von ausschließlich Chemikern, Biologen und Physikern. Es zeigte sich, dass der Schlüssel zur klinischen Anwendung in der Ermöglichung volumenselektiver (also voxelbezogener) Signalgewinnung liegt. Wir werden im Abschnitt 1.5.3 auf diesen Schritt zurückkommen.

¹Der anfangs verwendete Begriff NMR-Tomographie und die im deutschen Sprachraum auch heute noch gebräuchliche Bezeichnung Kernspintomographie machten es teilweise recht schwierig, misstrauischen Patienten zu erläutern, dass bei dem Verfahren absolut keine radioaktive oder Röntgenstrahlung verwendet wird. Dies trug dann dazu bei, dass das N recht schnell aus den Bezeichnungen in den Kliniken entfernt wurde, MRT bzw. MRI setzten sich (auch international) durch.

1.5.1 Physikalische Grundlagen: NMR

Bewegte elektrische Ladungen erzeugen Magnetfelder. Die Physiker *E.M.Purcell* und *F.Bloch* entdeckten 1946 unabhängig voneinander magnetische Eigenschaften in der Materie, die nur den Atomkernen zugeschrieben werden konnten. Daraus schloss man, dass ein in einer kreiselähnlichen Präzessionsbewegung resultierender Eigendrehimpuls oder *Spin*² nicht nur bei Elektronen, sondern auch bei Nukleonen auftritt. Etwas überraschend erscheint dies für die nach außen elektrisch neutralen Neutronen. Die Ursache liegt in der kontinuierlich erfolgenden Aufnahme und Abgabe geladener π -Mesonen [Str1984].

Uns soll hier nur der einem einzelnen Proton entsprechende Wasserstoff-Atomkern ${}^1_1\text{H}$ interessieren, denn allein auf seine Wechselwirkungen beruhen MR-Bilder in der Medizin [WTVW1992]. Das ist ausreichend, da sich der menschliche Körper hauptsächlich aus Geweben, die Wasser (H_2O) und organische Verbindungen (Kohlen- und Wasserstoffatome als Gerüst) enthalten, zusammensetzt.

Das Proton führt eine Präzessionsbewegung mit der Frequenz f_0 , der so genannten *Larmor-Frequenz*, aus. Die Achsen dieser Bewegungen verlaufen normalerweise in gequantelter, aber zufälliger Richtung. Durch das Anlegen eines äußeren Magnetfeldes kommt es zu einer Drehung der Präzessionsachsen so, dass sie dann parallel zum Magnetfeld verlaufen. Quantenmechanisch sind nun nur zwei Zustände möglich: eine energetisch günstige Ausrichtung der Protonen in Feldrichtung sowie eine energetisch ungünstige ihr entgegen. Sie folgen einer *Boltzmann-Verteilung* [BrS1999]:

$$\frac{N_{\text{gegen}}}{N_{\text{in}}} = \exp\left(-\frac{\Delta E}{kT}\right) \quad (1.1)$$

Dabei bezeichnen T die Temperatur in Kelvin, $k = 1,381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$ die Boltzmann-Konstante und ΔE die Energiedifferenz zwischen den beiden Energieniveaus in Joule. Für das Senden eines Signals ist der Übergang von Protonen aus dem hohen in das niedrige Energieniveau notwendig. Durch Zufuhr von Energie mittels hochfrequenter elektromagnetischer Strahlung gelingt bei einigen Protonen die Umkehr ihrer Ausrichtung gegen die Feldrichtung (*Anregungsimpuls*), wobei dann Protonen, wie gewünscht unter Signalabgabe, wieder in den thermodynamischen Gleichgewichtszustand zurückkehren (*Relaxation*). Der Prozess ist irreversibel. Die Anregung hat resonant zur Präzessionsbewegung, d.h. mit der Larmor-Frequenz f_0 zu erfolgen. Für sie gilt:

$$f_0 = \frac{\gamma B_0}{2\pi} = \frac{\Delta E}{h} \quad (1.2)$$

Hier stehen $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{Js}$ für das *Plancksche Wirkungsquantum* und γ für das *gyromagnetische Verhältnis*, einer sich aus der spezifischen Kernladung wie folgt ableitenden, jedem Atomkern zugeordneten Konstanten:

$$\gamma = \frac{g_q q}{2m_q} \quad (1.3)$$

Das Zeichen q steht für die Ladung des Kerns in Coulomb, und m_q ist die dieser Ladung zugeordnete Masse des Kerns in Kilogramm. Ohne den *g-Faktor* g_q lässt sich die Gleichung mit der klassischen Physik herleiten. Es zeigte sich jedoch, dass für Betrachtungen zum Spin von Elementarteilchen quantenmechanisch und relativistisch

²engl., schnelle Drehung

bedingte einheitenlose Korrekturfaktoren notwendig werden³. Für den hier relevanten Fall eines Wasserstoffkerns ist der (experimentell bestimmte) Wert $g_p = 2,793^4$. Wir erhalten durch Einsetzen dieses g-Faktors, der Elementarladung und der Masse eines Protons in (1.3):

$$\gamma_p = \frac{2,793 * 1,602 * 10^{-19} \text{As}}{1,673 * 10^{-27} \text{kg}} = 2,674 * 10^8 \frac{\text{rad}}{\text{T}} \quad (1.4)$$

Dies bedeutet eine Larmor-Frequenz von etwa $42,5 \text{MHz}$ (also im Kurzwellenbereich) bei einem üblichen Magnetfeld der Flussdichte 1 Tesla. Für eine weitergehende Darstellung der physikalischen Beschreibungsmöglichkeiten von Spinsystemen siehe z.B. [Abr1961].

1.5.2 Relaxationszeiten T1 und T2

Die relevante Information eines NMR-Experiments steckt im Zeitverlauf der Relaxation. Dabei sind prinzipiell zwei Prozesse, die beide in exponentieller Form verlaufen, zu unterscheiden:

1. *Spin-Lattice-Relaxation, longitudinale Relaxation*
Die Rückkehr der durch den hochfrequenten Anregungspuls ausgelenkten Spinrichtungen in Feldrichtung verläuft exponentiell. Die Zeitkonstante dieses Vorgangs ist die Relaxationszeit T1.
2. *Spin-Spin-Relaxation, transversale Relaxation*
Der Hochfrequenzpuls führt sekundär auch zu einer Kohärenz der Präzessionsbewegungen der einzelnen Protonen. Nach dessen Abschaltung klingt diese Phasenübereinstimmung exponentiell ab. Die diesem Prozess zugeordnete Zeitkonstante ist die Relaxationszeit T2⁵.

Diese beiden Zeitkonstanten sind Charakteristika eines Stoffes bzw. Gewebes, wobei jedoch auch starke Überlappungen [WTVW1992] auftreten, was eine sichere Zuordnung meist unmöglich macht.

Es wurden viele verschiedene Pulssequenzen entwickelt, um Daten zu erhalten, die in der Regel eine gewichtete Kombination aus T1 und T2 darstellen. Die wichtigsten Parameter zur Steuerung dieser Wichtung sind die *Repetitionszeit TR*, die Zeit zwischen der Abfolge von zwei Pulssequenzen, und die *Echozeit TE*.

1.5.3 Volumenselektion

Für die klinische Anwendung ist es nun von besonderer Wichtigkeit, dass das Verfahren in vertretbarer Zeit auf eine ganze 3D-Matrix (z.B. $128 \times 256 \times 256$ Voxel) angewendet werden kann. Über das Magnetfeld sowie die Frequenz der HF-Pulses lässt sich gemäß (1.2) eine (durch das feste γ kernspezifische) lokal begrenzte Resonanz erzielen. Durch Zuschaltung von Magnetfeldgradienten lässt sich eine Dimension kodieren (Frequenzkodierung). In den anderen beiden Dimensionen nutzt man meist ein

³Für ein Elektron ist der g-Faktor mit $g_e = 2,002$ sehr nahe bei 2, so dass dies zunächst als *magnetomechanische Anomalie* [Str1984] gedeutet wurde.

⁴Quelle: www.drusch.com/help/qm-prgf.html

⁵Genauer gesagt, ist dies zunächst die Relaxationszeit T2*, die die in der Realität immer zu einem gewissen Teil auftretenden Inhomogenitäten im Feld und in der Magnetisierung mit beinhaltet. Durch eine unter *Spin Echo* bekannte Pulssequenz lassen sich diese Störung jedoch fast vollständig unterdrücken.

Phasenkodierung. Durch eine *inverse 2D-Fouriertransformation*, ergeben sich dann die Orts-Informationen. Moderne Pulssequenzen ermöglichen Repetitionszeiten von nur $40ms$, was in einer Aufnahmezeit [WTVW1992] von (obige Auflösung angenommen) akzeptablen $40ms * 256 * 128 = 21,8min$ resultiert. Für weitere Details siehe z.B. [BrS1999].

1.5.4 Gesundheitsrisiken

Die Kernspintomographie ist ein relativ sicheres Verfahren, ohne große Risiken für den Patienten. Das größte dabei auftretende steht in Verbindung mit dem notwendigen Magnetfeld großer Stärke. Metallische Gegenstände am und im Patienten (z.B. Herzschrittmacher) sowie in der Nähe des MRI-Systems sind zu vermeiden. Sie können sich schnell zu Geschossen entwickeln und Menschen verletzen [HBF1997].

Eine Strahlenbelastung tritt nur durch das HF-Signal, das im Kurzwellenbereich liegt - vgl. Abschnitt 1.5.1, auf. Es kann bei intensiven Pulssequenzen zu einer unerwünscht starken Erhitzung des Patienten führen. Dafür gibt es gesetzliche Grenzwerte, die bei der Untersuchungsplanung beachtet werden müssen [BrS1999].

1.5.5 Anwendung auf unser Projekt

Das Verfahren ist das beste derzeit breit verfügbare, um nichtinvasiv Daten zur Hirnoberfläche zu erhalten. Zwar sind pathologische Veränderungen in der Regel auf T2-gewichteten Bildern besser zu erkennen, was eine Verwendung dieser nahelegen könnte. Doch soll in unserem Fall allein aus der anatomischen Struktur heraus eine Diagnose oder Diagnoseunterstützung erfolgen, womit sich dann T1-gewichtete Datensätze mit dem geringeren Signal-Rausch-Verhältnis [WTVW1992] besser eignen.

1.6 Vorverarbeitung

An dieser Stelle gehen wir davon aus, dass uns der Kernspintomograph einen Grauwert-Datensatz zum Hirn eines Patienten im Volumenmodell geliefert hat.

Die ersten beiden Schritte erleichtern die spätere Weiterverarbeitung der Daten [WTVW1992]. Viele Algorithmen werden durch die Isotropie des Volumendatensatzes, was eine würfelförmige Voxelgestalt bedeutet, erheblich vereinfacht. Gebräuchliche MR-Tomographen liefern jedoch Bilderserien mit einer Pixelgröße von $0,88mm * 0,88mm$ und einem Abstand von $1,2mm$ zwischen zwei direkt benachbarten Schnitten. Eine Erzeugung von Zwischenschichten durch Interpolation liefert dann die gewünschte Eigenschaft, d.h. in diesem Fall eine Voxelhöhe von ebenfalls $0,88mm$. Unbedingt festgehalten werden muss dabei, dass trotz der so erhöhten Anzahl von Schnittbildern natürlich keine zusätzliche Information gewonnen werden kann [Zui1995].

Die Datenreduktion bezieht sich auf eine Verringerung der Grauwerttiefe von 12 Bit auf 8 Bit, da die Isoflächen mit 256 Abstufungen bei dieser (relativ geringen) Auflösung noch genügend genau erkannt werden können. Günstig kann sich auch der Einsatz von z.B. Medianfiltern auswirken, um aufnahmespezifische Fehler zu reduzieren.

1.7 3D-Rekonstruktion von Isoflächen (Triangulierung)

Erinnern wir uns an die verschiedenen Möglichkeiten von internen Modellen aus Abschnitt 1.3. Leider ist es nun so, dass in unserem Fall die MRI-Bilddaten im Volumenmodell vorliegen, für eine Krümmungsschätzung (nach der hier vorgesehenen Prozesskette gemäß Abb.1.1) aber eine Darstellung im Oberflächenmodell, genauer gesagt eine Triangulierung, benötigt wird. Dem wollen wir uns jetzt zuwenden.

Aufgrund des geringeren Rechenaufwandes bei der Visualisierung und Verarbeitung von Objekten im Oberflächenmodell im Vergleich zu dem bei solchen im Volumenmodell gab es schon recht früh Bestrebungen, eine möglichst genaue Abbildung, mit guten Eigenschaften bezüglich der Eignung für die Weiterverarbeitung, vom Volumenmodell ins Oberflächenmodell zu erreichen. Die folgende Abhandlung lehnt sich an die in [Smi2000] vorgenommene an.

1.7.1 Contour Linking

In den 1970er und frühen 1980er Jahren wurde die sehr zweifelhafte Methode des *Contour Linking* eingesetzt. Durch (willkürliche oder geschickte) Auswahl einer Dimension als z -Richtung lassen sich die Voxel in Höhe eines jeweils festen z -Wertes als Pixel eines Schnittbildes interpretieren. In jedem dieser Schnittbilder ist mit Methoden der 2D-Bildverarbeitung eine Kontur extrahierbar, es können natürlich auch mehrere sein. Auf den zu jeweils einem Schnitt gehörenden Konturen sind nun Knotenpunkte festlegen. Nach der Anisotropie des Verfahrens stellt die vernünftige Wahl der Positionen das nächste Problem dar. Schließlich müssen die Knotenmengen direkt benachbarter Schichten zu Dreieckstreifen verbunden werden. Erneut kann es Probleme bereiten, hier die "richtigen" (im Sinne einer guten Approximation des Volumenmodells) Knoten über Kanten zu verbinden. Contour Linking ist kein topologieerhaltendes Verfahren.

1.7.2 Marching Cubes und Modifikationen

Ein erster Durchbruch gelang 1987 mit der Methode der *Marching Cubes* [LC1987], der erste isotrope, d.h. alle drei Dimensionen gleichwertig behandelnde, Vergitterungs-Algorithmus. Fast alle heute eingesetzten Triangulierungsalgorithmen basieren auf MC, stellen Modifikationen oder Erweiterungen dar, was oft auch schon an den ähnlichen Namen erkennbar ist. Bei MC wird zunächst der Schwellwert der gewünschten Isofläche festgelegt. Dieser teilt die Voxelmenge in zwei Klassen⁶ ein. In einer großen Schleife werden danach alle möglichen $2 \times 2 \times 2$ -Würfel von Voxeln durchlaufen. Ihre Mittelpunkte bilden zusammen einen Würfel gleicher Größe wie ein Voxel. Dies ist auch der Grund für die Bezeichnung des Algorithmus. Bei der Belegung der jeweils acht zu betrachtenden Voxel gibt es bezüglich der beiden Klassen $2^8 = 256$ Möglichkeiten, deren Anzahl sich durch Symmetrieanalogien auf 16 reduziert. Von diesen sind die beiden Fälle, dass jeweils alle acht Voxel zu nur einer Klasse gehören, irrelevant für die Generierung von Dreiecken der Isofläche, denn dann liegt in diesem Bereich kein Klassenübergang vor. Den verbleibenden 14 Fällen lassen sich Muster für die ein bis vier zu erzeugenden Dreiecke zuordnen. Die genauen Positionen ergeben sich durch Interpolation des Isowertes zwischen je zwei klassenverschiedenen Ecken des aus den Voxelmittelpunkten gebildeten Würfels. Dies garantiert eine Auflösung unterhalb der Voxelgröße. MC ist parallelisierbar, kann aber zu Topologiefehlern führen.

⁶Im Falle einer geschlossenen Oberfläche, wie es auch die Hirnoberfläche ist, entsprechen diese beiden Klassen dem Inneren und dem Äußeren.

Discretized Marching Cubes [MSS1994] ist eine Vereinfachung von MC, die auf die Interpolation verzichtet, was unter Hinnahme geringerer Genauigkeit auf eine deutliche Beschleunigung führt, bedingt durch den nun möglichen Einsatz von Ganzzahl-Arithmetik sowie einer echten Mustertabelle ("lookup-table"). Das Verfahren eignet sich damit besonders für besonders schnell zu erfolgende Berechnungen z.B. während des Suchens nach einem passenden Schwellwert.

Marching Tetrahedras [GH1995] zerlegt jeden der Würfel aus MC in je fünf Tetraeder. Das beseitigt zwar die topologischen Fehler, führt aber zu mehr Dreiecken. Eine Vereinfachung des generierten Netzes gelingt allerdings recht gut [GH1994]. MT mit einer solchen nachgeschalteten Simplifikation ist in *vslim* der *Vista*-Bibliothek implementiert. Das Verfahren ist nicht isotrop.

Regularized Marching Tetrahedras [TPG1998] bindet den Vereinfachungsschritt, hier eine Knotenhaufen-Mittelung ("vertex clustering"), schon mit ein. Es sollen etwa 70% weniger Dreiecke als mit MC entstehen, außerdem zeichnen sich diese durch eine höhere Regularität aus. Das bringt Vorteile in der Visualisierung (Schattierungsmodelle) und in der Weiterverarbeitung (auch Krümmungsschätzung) mit sich.

1.7.3 Constrained Elastic Surface Nets

Ein weiterer, fortgeschrittener Ansatz ist in [BVGVPV1999] zu finden, wobei das Grundkonzept erstmals schon in [Gib1998] publiziert wurde. Zu Beginn werden die gleichen Würfel wie bei MC ausgewählt. Nun wird jedoch nicht sofort trianguliert. Die Mittelpunkte der Würfel sind die Anfangspositionen der Knoten des zu generierenden Dreiecksnetzes. Im Entspannungsschritt werden die Knoten dann entlang der jeweils berechneten Gradienten (bei der meiner Meinung nach besten Variante SNG) verschoben. Die Verschiebungsweite ist dabei die über Interpolation geschätzte Entfernung zur Isofläche. Mit der Nebenbedingung, dass der Knoten den Würfel nicht verlassen darf, wird eine zu große Abweichung von der wahren Isofläche verhindert. Erst jetzt erfolgt die Vergitterung. SNG liefert ähnlich viele Dreiecke wie MC, aber deutlich glattere Triangulierungen [BVGVPV1999].

1.7.4 Vergleich der Verfahren

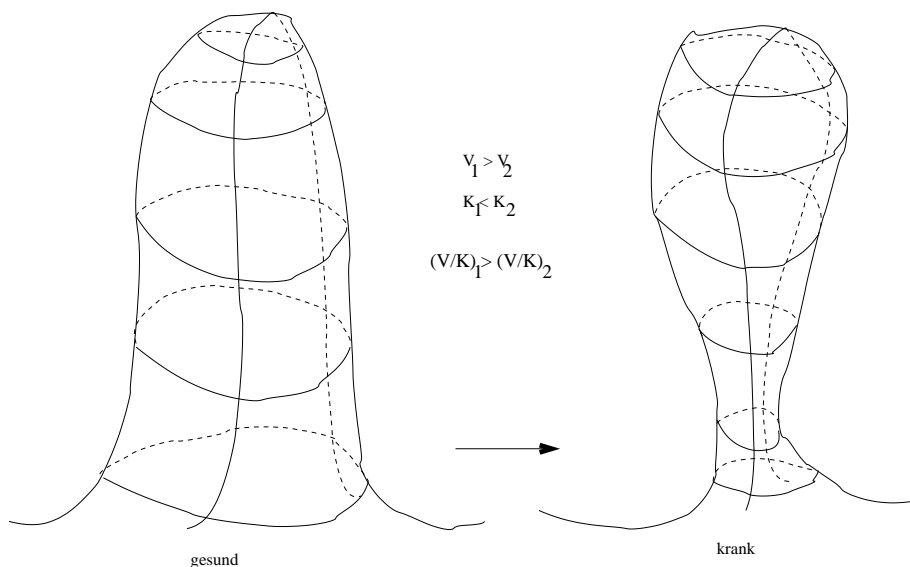
Neben den vier Kriterien Genauigkeit der Rekonstruktion, Glätte des Netzes, Anzahl der Dreiecke und Regularität der Dreiecke, die in [BVGVPV1999] auch quantitativ definiert sind, werden in Tab.1.3 noch zusätzlich die Topologieerhaltung sowie die Geschwindigkeit aufgeführt. Die angegebene Bewertung ist nur qualitativ, da die Algorithmen nicht selbst implementiert und getestet wurden. Dabei steht ein '+' für gut und ein '-' für schlecht. Falls doch eine genauere Aussage getroffen werden kann, sind ein '++' für sehr gut bzw. ein '--' für sehr schlecht angegeben. Eine '0' bedeutet, dass das betreffende Kriterium nicht entschieden werden kann. Wir sehen, dass die von uns zu nutzende MT-Implementierung keine schlechte Wahl darstellt, zumal der schlechteste Punkt von MT, die Anzahl der Dreiecke, durch den sich anschließenden Vereinfachungsschritt deutlich aufgewertet wird. Trotzdem halte ich die Nutzung von SNG (siehe dazu auch Abschnitt 4.5), als bestes der hier genannten Verfahren, wichtig für zukünftige Untersuchungen.

| Verfahren Ges.-Urteil | Topologie- erhaltung | Genau- igkeit | Glätte | Anz. der Dreiecke | Regularität der Dreiecke | Geschwin- digkeit |
|--------------------------|-------------------------|------------------|--------|----------------------|-----------------------------|----------------------|
| CL: -- | -- | -- | - | 0 | 0 | 0 |
| MC: - | - | + | - | - | - | + |
| DiscMC: + | - | - | -- | - | + | ++ |
| MT: + | + | + | - | -- | - | - |
| RMT: + | + | + | - | + | ++ | - |
| SNG: ++ | + | ++ | + | - | ++ | + |

Tabelle 1.3: Triangulierungsalgorithmen im Vergleich

1.8 Degenerative Hirnerkrankungen

Die uns interessierende Klasse von Hirnerkrankungen ist mit einem Schwund von Gehirnvolumen verbunden. Dabei tritt eine stärkere Wichtung dieses Volumenverlusts in den Fundusregionen auf, Abb.1.4. Dort vergrößert sich also die Krümmung. Untersucht man diese Entwicklung kombiniert durch Blick auf das Verhältnis Volumen zu Krümmung (vgl. Abb.1.1), so ist zu erwarten, dass sich ein fortschreitendes Krankheitsbild in einer signifikanten Abnahme dieses Quotienten niederschlägt. Das ist zu untersuchen und gegebenenfalls für die Diagnostik nutzbar zu machen. Leider ist es so, dass eine Überlagerung dieser pathologischen Veränderungen mit normalen Alterserscheinungen stattfindet [HBF1997]. Ein Volumenschwund allein ist deshalb nicht notwendig ein Krankheitssymptom. Es besteht die Hoffnung, dass die beschriebene Methode eine zuverlässigere Klassifikation als eine allein volumenbasierte Beurteilung ermöglicht.

Abbildung 1.4: Änderung von Volumen V und Krümmung K sowie ihres Quotienten beim "Verplumpen" einer Windungsfurche

Kapitel 2

Das stetige Krümmungsmodell

2.1 Kurven in der Ebene

Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine invertierbare, zweimal differenzierbare Abbildung, die eine reguläre, nach der Bogenlänge parametrisierte (d.h. $|c'(t)| = 1$) Kurve beschreibt. Die (vorzeichenfreie) Krümmung an der Stelle t lässt sich dann definieren als

$$\kappa(t) := |c''(t)| \quad (2.1)$$

D.h. die Länge des Beschleunigungsvektors bei konstanter Bahngeschwindigkeit ist ein Maß für die lokale Krümmung. Geometrisch hat dies zwei verbreitete Interpretationen. Einmal ist eine Deutung als Änderungsgeschwindigkeit der Richtung der Tangente möglich:

$$\kappa(t) := \frac{d\theta}{ds}(t) \quad (2.2)$$

Bei Vorgabe einer Orientierung gestattet dies die Vorzeicheneinführung. Außerdem wird die Einheit $[\kappa] = \frac{[\Delta\theta]}{[\Delta s]} = \frac{1}{1m} = 1m^{-1}$ etwas deutlicher als bei der obigen Definition.

Andererseits kann man einen lokalen Berührungskreis derart konstruieren, dass er bis zur 2.Ableitung mit der Kurve übereinstimmt (Berührung 2.Ordnung). Er hat den Radius

$$r(t) = \frac{1}{|\kappa(t)|} \quad (2.3)$$

Für eine Krümmung 0 geht r gegen unendlich. Sein Mittelpunkt ist der Krümmungsmittelpunkt, dessen Lage relativ zur Kurve bei gegebener Durchlaufrichtung (Orientierung) Auskunft über das Vorzeichen von κ gibt.

2.2 Flächen im Raum

Wesentliche Beiträge zur Krümmungstheorie von Flächen im Raum kamen von *C.F.Gauß* 1827. Hier folgt eine Zusammenfassung der Darstellung in [Bro1979].

Sei $f(U)$ eine reguläre, parametrisierte Fläche im \mathbb{R}^3 , also $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit dem Parametervektor $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ und dem Ortsvektor

$$P = (p_1(u_1, u_2), p_2(u_1, u_2), p_3(u_1, u_2))$$

Dann sind die beiden partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial u_1}(u)$ und $\frac{\partial f}{\partial u_2}(u)$ linear unabhängig und spannen somit einen zweidimensionalen Unterraum auf. Als günstig erwies es sich, ein lokales kartesisches Koordinatensystem in der Umgebung eines Punktes $P_0 = f(u_0)$ der Fläche zu definieren, was die Betrachtungen erheblich vereinfacht. Dabei liege der Ursprung in P_0 und die z-Achse verlaufe in Richtung des Einheitsnormalenvektors $N_0 := \frac{\partial_1 f(u_0) \times \partial_2 f(u_0)}{|\partial_1 f(u_0) \times \partial_2 f(u_0)|}$. Zunächst wähle man nun zwei Einheitsvektoren E_1 und E_2 in der Tangentialebene zu P_0 , so dass ein rechtshändiges x, y, z-Koordinatensystem mit dem Dreiein (E_1, E_2, N_0) entsteht. Dies liefert eine f entsprechende um P_0 lokale Höhenfunktion $z = z(x, y)$. In diesem Bezugssystem lauten die ersten 3 Glieder der Taylor-Entwicklung von z :

$$z = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial x \partial y} xy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial y^2} y^2 + \dots \quad (2.4)$$

Da eine gesuchte Krümmungsbeschreibung analog zum Fall der Kurve in der Ebene die Fläche lokal bis zu einer Berührung 2.Ordnung charakterisieren soll und der Aufbau des Koordinatensystems auf Normalenvektor und Tangentialebene die Unabhängigkeit von Gliedern 0. und 1.Ordnung sicherstellt, genügt für eine charakteristische Approximation folgende Bilinearform:

$$\tilde{z}(x, y) := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{xx}z(0,0) & \partial_{xy}z(0,0) \\ \partial_{xy}z(0,0) & \partial_{yy}z(0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Durch eine Hauptachsentransformation, die in diesem Falle eine Drehung um N , also die z-Achse, bedeutet, lassen sich die gemischten partiellen Ableitungen beseitigen, die der lokalen Approximations-Abbildung zugeordnete Diagonalmatrix (ohne den Faktor 1/2) ist dann:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Die beiden Eigenwerte κ_1 und κ_2 sind reell, da in den gemischten Ableitungen zweiter Ordnung die Ableitungsreihenfolge nach dem Satz von Schwarz beliebig ist, was die Symmetrie der Abbildungsmatrix, wie oben schon so geschrieben, zur Folge hat. Sie werden die *Hauptkrümmungen* genannt. Außerdem sind die zugehörigen Eigenräume hier jeweils eindimensional und orthogonal zueinander. Sie werden als *Hauptkrümmungsrichtungen* bezeichnet. Zusammenfassend können wir für \tilde{z} im neuen Koordinatensystem schreiben:

$$\tilde{z}(x, y) = \frac{1}{2} (\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2) \quad (2.7)$$

Einen noch besseren Überblick gewinnt man durch Definition der *Gaußschen Krümmung* K und der *mittleren Krümmung* H :

$$K := \det \Omega = \kappa_1 * \kappa_2 \quad (2.8)$$

und

$$H := \frac{1}{2} \operatorname{tr} \Omega = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \quad (2.9)$$

Als Einheiten ergeben sich $[K] = 1m^{-2}$ und $[H] = 1m^{-1}$ aus der Einheit $1m^{-1}$ der beiden Hauptkrümmungen, die selbst Schnittkurvenkrümmungen sind. Die Definitionen sind sinnvoll, da sowohl Determinante als auch Spur basisunabhängige Charakterisierungen linearer Abbildungsmatrizen sind.

Dabei ist H offenbar von der Orientierung der Normalen N_0 abhängig, während bei K die bei Orientierungswechsel auftretenden Vorzeichenänderungen der Hauptkrümmungen sich gegenseitig ausgleichen. Diese Unabhängigkeit vom Bezugssystem ist ein großer Vorteil. Im Rahmen des sehr allgemeinen Tensorkalküls bezeichnet man K als Skalar und H als Pseudoskalar.

Eine brauchbare Klassifikation der Flächenpunkte kann nun anhand von K erfolgen:

1. $K=0$: Wenigstens eine der beiden Hauptkrümmungen ist 0. Der Punkt P_0 wird parabolisch genannt. Die Umgebung verhält sich ähnlich wie ein Zylinder, der, falls auch die andere Hauptkrümmung verschwindet, zur Ebene entartet.
2. $K>0$: Die beiden Hauptkrümmungen haben das gleiche Vorzeichen. Es liegt ein elliptischer Punkt vor. Im Spezialfall $\kappa_1 = \kappa_2$ heißt dieser Nabelpunkt, wobei das approximierende Ellipsoid, dann zur Kugel entartet.
3. $K<0$: Es liegen verschiedene Vorzeichen bei κ_1 und κ_2 vor. Damit wird der Punkt entsprechend dem lokal ähnlichen Körper des einschaligen Hyperboloids als hyperbolisch bezeichnet.

Wie schon oben gezeigt, stehen die Hauptkrümmungsrichtungen senkrecht aufeinander. Für die Beschreibung der Krümmung der Fläche in eine allgemeine Richtung $\mu(\cos\alpha E_1 + \sin\alpha E_2)$ normal zu $f(U)$ in P_0 gilt der Satz von Euler:

$$\kappa_N(\alpha) = \kappa_1 \cos^2 \alpha + \kappa_2 \sin^2 \alpha \quad (2.10)$$

Damit lässt sich zeigen, dass der Begriff der *mittleren* Krümmung für H auch als Mittelung über alle Normalschnittkrümmungen $\kappa_N(\alpha)$ gerechtfertigt ist:

$$\begin{aligned} \overline{\kappa_N} &= \frac{\int_0^{2\pi} \kappa_N(\alpha) d\alpha}{2\pi} = \frac{\int_0^{2\pi} (\kappa_1 \cos^2 \alpha + \kappa_2 \sin^2 \alpha) d\alpha}{2\pi} \\ &= \frac{\int_0^{2\pi} \kappa_1 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) d\alpha + \int_0^{2\pi} (\kappa_2 - \kappa_1) \sin^2 \alpha d\alpha}{2\pi} \end{aligned}$$

$$= \frac{2\pi\kappa_1 + (\kappa_2 - \kappa_1) \left[\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\sin 2\alpha \right]_0^{2\pi}}{2\pi}$$

$$\overline{\kappa_N} = \frac{2\pi\kappa_1 + (\kappa_2 - \kappa_1)\pi}{2\pi} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = H \quad (2.11)$$

2.3 Das Gauß-Bonnet-Theorem und die Integralkrümmung

Dieses zentrale Ergebnis der globalen Differentialgeometrie wird uns später sehr nützlich sein. Es stellt ein so grundlegendes Resultat dar, dass das Theorem einen eigenen kleinen Abschnitt verdient. Wir wollen es hier jedoch nur in einer uns nützlichen speziellen Form für eine geschlossene Fläche im Raum mit topologischer Äquivalenz zur Kugel betrachten. Für Verallgemeinerungen hin zu topologisch andersartigen Körpern und zu allgemeinen Riemannschen Mannigfaltigkeiten im n -dimensionalen Raum siehe [KEMa1995] bzw. [Lee1997].

Zunächst ist eine globale Größe für eine solche geschlossene Fläche F zu definieren. Dies ist die Integralkrümmung K_{ges} :

$$K_{ges}(F) := \int \int_F K dA \quad (2.12)$$

Die Größe hat die Einheit $[K_{ges}] = [K][dA] = 1m^{-2} * 1m^2 = 1$. Die Aussage des Theorems ist nun, dass die Integralkrümmung einer topologisch zur Kugel äquivalenten (d.h. Existenz einer injektiven, stetigen Abbildung auf eine Kugel) geschlossenen Fläche stets gleich 4π ist:

$$K_{ges}(F) = 4\pi \quad (2.13)$$

Eine Anpassung des Integrationsgebietes ermöglicht außerdem die Angabe eines regionalen Krümmungsparameters für dieses Gebiet. Dann ist F als ein Flächenstück zu betrachten. Durch Differenzieren von (2.12) erhält man einen weiteren Zugang zur Krümmung im Punkt P_0 :

$$K(P_0) = \frac{dK_{ges}(F)}{dA} \text{ mit } P_0 \in F \quad (2.14)$$

Auch für Kurven in der Ebene sind analoge Betrachtungen möglich. Die Integralkrümmung κ_{ges} einer geschlossenen Kurve C ist dann:

$$\kappa_{ges}(C) := \oint_C \kappa(s) ds \quad (2.15)$$

wobei der Parameter s die Bogenlänge bezeichnet. Es gilt $[\kappa_{ges}] = [\kappa][ds] = 1m^{-1} * 1m = 1$. Der entsprechende Satz dazu ist der Umlaufsatz von Hopf. Er besagt, dass eine positiv orientierte, invertierbare Kurve c stets eine Integralkrümmung von 2π besitzt:

$$\kappa_{ges}(C) = 2\pi \quad (2.16)$$

Plausibel wird dies bei Betrachtung von $\oint_c \kappa(s) ds = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{ds}(s) ds = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$ unter Verwendung von (2.2). Für einen Beweis siehe [Lee1997]. Falls c nur ein bestimmtes

Kurvenstück bezeichnet, ergibt sich natürlich die Gesamtkrümmung dieses Kurvenstückes. Auch hier erhält man durch Differenzieren von (2.15) eine weitere Formel für κ im Punkt P_0 :

$$\kappa(P_0) = \frac{d\kappa_{ges}(C)}{ds} \text{ mit } P_0 \in C \quad (2.17)$$

2.4 Alternative Beschreibungen

2.4.1 Die mittlere Krümmung H

Einen interessanten Ansatz für die Charakterisierung von H abseits der Definition findet man in [BaS2001]. Die mittlere Krümmung kann danach als Divergenz des Einheitsnormalenvektorfeldes betrachtet werden:

$$H = -\text{div} N_0 \quad (2.18)$$

Im trivialen flachen Fall weisen all Normalen die gleiche Richtung auf. Damit wird ihre Divergenz wie behauptet null. In der anderen Richtung gehen wir von einem Gebiet mit $H \equiv 0$ aus. Das ist nach der Definition von z.B. [Kre1968] lokal eine Minimalfläche. Anschaulich ist auch, dass der Fluss als Ausgleich von Potentialdifferenzen in einer Minimalfläche verschwindet. Somit ist laut [KEMa1995] das Vektorfeld im betrachteten Gebiet quellenfrei, d.h. $\text{div} N_0 \equiv 0$. Die Charakterisierung ist mit $[H] = [\text{div} N_0] = \left[\sum \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] = 1m^{-1}$ einheitenkorrekt.

2.4.2 Die Integralkrümmung K_{ges}

In der Arbeit [PS1998] wird zur Beschreibung der Integralkrümmung K_{ges} eines Flächenstückes die Gauß-Abbildung, auch bekannt unter dem Begriff der sphärischen Abbildung, $g: R^2 \rightarrow S^2$ genutzt. Dabei wird jedem Punkt P der Fläche $f(U)$ sein Einheitsnormalenvektor N_0 zugeordnet. Das Bild eines Parametergebietes $U \subseteq R^2$ ist also ein Teil der Oberfläche der Einheitskugel $g(U)$. Der Raumwinkel dieses Bildes, der dem Zahlenwert nach der Fläche auf der Einheitskugel entspricht, ist ein Maß für die Integralkrümmung des Flächenstückes. Auch diese Sichtweise ist einheitenkorrekt, da sowohl Raumwinkel als auch Integralkrümmung die Einheit 1 besitzen.

Für einen Flachpunkt ist die Normalenrichtung in seiner Umgebung immer konstant. Damit wird das Bild der Gauß-Abbildung nur ein Punkt mit dem Maß null auf der Einheitskugel. Das ist in Übereinstimmung mit der verschwindenden Gaußschen Krümmung in diesem Punkt, die auch eine Gesamtkrümmung von null der Umgebung des Punktes induziert. Außerdem ergeben sich für elliptische Punkte korrekterweise positive Überdeckungswinkel, während bei hyperbolischen Punkten zwangsweise eine der beiden Hauptkrümmungsrichtungen eine negative Orientierung auf der Einheitskugeloberfläche hervorruft, so dass der überdeckte Raumwinkel in Übereinstimmung zur Definition negativ wird.¹

¹Da hier nur eine *Umgebung* betrachtet wird, sind nach einem Grenzübergang in (2.12) die Vorzeichen von K und K_{ges} übereinstimmend. Es genügen somit Betrachtungen zum Vorzeichen von K_{ges} .

2.5 Zusammenfassung

Wir sind nun in der Lage, die Gaußsche und die mittlere Krümmung als eine konsequente Fortsetzung des Krümmungsbegriffs von Kurven in der Ebene zu charakterisieren.

Allgemein beschreibt eine Krümmung in einem Punkt die Änderung der Richtung des Tangentialraumes in der Umgebung dieses Punktes. Qualitativ heißt eine schnelle Änderung eine starke Krümmung. Während für Kurven in der Ebene dazu ein einziger Krümmungswert genügt, sind für Flächen im Raum zwei Werte notwendig, genauer gesagt eine 2×2 -Matrix, die jedem Punkt der Tangentialebene den Ortsvektor der Änderungsrate der Einheitsnormalen zuordnet. Diagonalisieren der Matrix durch Basiswechsel liefert die beiden Hauptkrümmungen, woraus sich nach obigen Definitionen (2.8)(2.9) die beiden Parameter ergeben. Für weiterführende Erläuterungen dazu und Verallgemeinerungen auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten siehe [Car1992] bzw. [Lee1997].

Kapitel 3

Diskrete Krümmungsmodelle

3.1 Einführung

Mit der seit den 1970er Jahren geschehenen Verbreitung von Rechentechnik und Programmen, die auch komplexe dreidimensionale Objekte darstellen und verarbeiten können, hat sich die triangulierte Oberfläche als Standardrepräsentation von Flächen im Raum durchgesetzt. Günstig erwiesen sich die hohe Flexibilität durch Dreiecke beliebiger Größe und Gestalt sowie die gute Abbildbarkeit des Modells mit Standarddatenstrukturen, was hohe Verarbeitungsgeschwindigkeiten ermöglicht. Dabei wird eine geschlossene Fläche mit der Euler-Poincaré-Charakteristik $\chi = 2$, d.h. ohne Löcher bzw. topologisch äquivalent zur Kugel, wie es das Hirn¹ auch ist, durch einen Polyeder mit e Ecken, f Flächen, hier speziell Dreiecke, und k Kanten genähert. Nach dem Eulerschen Polyedersatz gilt $e + f - k = \chi$, in unserem Spezialfall erhalten wir:

$$\begin{aligned}k &= \frac{3}{2}f \\ e &= \frac{f}{2} + 2\end{aligned}\tag{3.1}$$

Es werden somit stückweise lineare Näherungen der glatten Originale verwendet. Exakte Anwendung der Definitionsformeln (2.1), (2.8) und (2.9) im Grenzübergang liefert jeweils gegen unendlich gehende Krümmungen an den Ecken (bei κ und K) bzw. Kanten (bei H) und nicht vorhandene Krümmungen auf den linearen Stücken (d.h. auf den Strecken und Flächen bzw. nur auf den Flächen). Diesen Makel gilt es durch sinnvolle Ausgleichs auf das gesamte Polygon² bzw. Polyeder zu beseitigen.

Die Grundidee der meisten hier betrachteten diskreten Krümmungsmodelle ist es also, zunächst die Integralkrümmungen an den nichtglatten Stellen, d.h. an den Ecken und Kanten, möglichst exakt zu bestimmen und dann durch Division durch zugeordnete Längen bzw. Flächen die Schätzer für die Krümmung in diesem Gebiet zu erhalten. Das entspricht einer gleichmäßigen Verteilung der in Mengen mit dem Maß null konzentrierten Massen auf zugeordnete Umgebungen, man spricht auch von einer *lokalen Mittelung*. Siehe dazu auch Abb.3.1, wo der anschauliche eindimensionale Fall

¹Wir gehen davon aus, dass keine Löcher im Gehirn vorkommen. Mit den in Kapitel 1 gemachten Angaben über Anatomie und Vergitterungsalgorithmus ist dies gewährleistet. In der Praxis kann es jedoch vorkommen, dass Korrekturen notwendig sind.

²Unter einem *Polygon* wollen wir ab jetzt, falls nicht ausdrücklich anders angegeben, ein ebenes n -Eck verstehen. Man beachte im Unterschied dazu einen *Polygonzug*, der nicht notwendig geschlossen ist.

verdeutlicht wird. Erläuterungen zu den Bezeichnungen sind im nächsten Abschnitt zu finden. In der Literatur herrscht dabei bei den Formeln zur Krümmung κ und zur Gaußschen Krümmung K eine größere Übereinstimmung als bei denen für die Schätzung der mittleren Krümmung H .

Interessant ist nun, dass die Integralkrümmungen an den Sprungstellen der ersten Ableitung exakt bestimmt werden können. Der Näherungsschritt besteht dann in der Zuordnung der Einflussbereiche, dies entspricht einer Parkettierung des Polygons bzw. Polyeders.

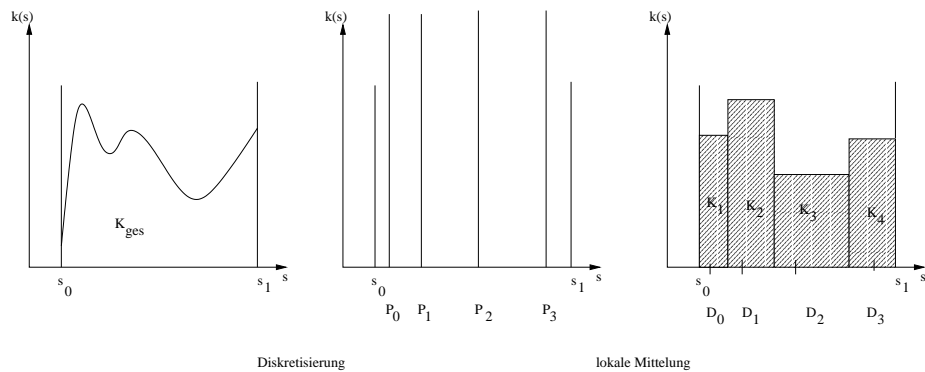


Abbildung 3.1: Diskretisierung und lokale Mittelung im 1D-Fall

3.2 Parkettierungen

Von entscheidender Bedeutung für die Qualität unserer Schätzer ist also die Umgebungszuordnung. Klar ist zunächst, dass diese eine Zerlegung der Domäne D mit dem Maß $A : D \rightarrow \mathbb{R}$ darstellen muss, um die korrekte Integralkrümmung der Kurve bzw. Fläche nicht zu verändern. Seien P_i die n nicht glatten Stellen mit den Massen m_i und D_i deren Umgebungen. Die Gesamtmasse m soll eine Erhaltungsgröße sein, um globale Sätze wie (2.13) und (2.16) zu sichern. Weiterhin sei $M := \frac{dm}{dA}$ die Massendichte als Ableitung von m nach dem Maß A . Dann gilt:

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

$$\bar{M}_i = \frac{m_i}{A(D_i)}$$

$$\bar{M} = \frac{m}{A(D)}$$

Umstellen der zweiten Gleichung nach m_i und Einsetzen in die erste liefert durch Gleichsetzen mit der nach m umgestellten dritten Gleichung:

$$\sum_{i=1}^n \bar{M}_i A(D_i) = \bar{M} A(D)$$

Daraus ergibt sich mit der intuitiv klaren Forderung, dass \overline{M} das gewichtete Mittel der \overline{M}_i sein soll, sofort $A(D) = \sum_{i=1}^n A(D_i)$, d.h. der Domäne müssen überdeckend und paarweise disjunkt n Umgebungen zugeordnet werden, also eine Zerlegung mit:

$$\bigcup_{i=1}^n D_i = D$$

$$D_i \cap D_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \tag{3.2}$$

Damit genügt es, in der Domäne die Zellengrenzen zwischen den Umgebungen festzulegen. Man spricht, besonders bei Flächen, auch von Parkettierungen.

3.2.1 Zerlegung eines Polygonzuges

Bei einem Polygonzug ist es die naheliegendste Variante, als Zellengrenzen jeweils die Mittelsenkrechten zwischen zwei direkt benachbart liegenden Eckpunkten zu wählen. Die Eindimensionalität eines solchen Streckenzuges macht kaum eine andere Wahl plausibel. Seien die Ecken P_i ihrer Nachbarschaft entsprechend angeordnet, d.h. $(|i - j| = 1) \Leftrightarrow (\exists \overline{P_i P_j}) \forall i, j$. Dann definieren wir:

$$D_i := \left\{ P \in \overline{P_i P_{i+1}} \mid \overline{P_i P} \leq \frac{\overline{P_i P_{i+1}}}{2} \right\} \cup \left\{ P \in \overline{P_{i-1} P_i} \mid \overline{P_i P} < \frac{\overline{P_{i-1} P_i}}{2} \right\} \tag{3.3}$$

Dabei ist die Zuordnung der Zellengrenzen selbst jeweils willkürlich, da dies nur endlich viele mit dem Maß null sind, also auch insgesamt das Maß null haben. Den häufig auftretenden Fall eines Polygons (geschlossener Polygonzug) kann man leicht durch Setzen des Endpunktes auf den Anfangspunkt mit einbetten. Siehe auch Abb.3.2.

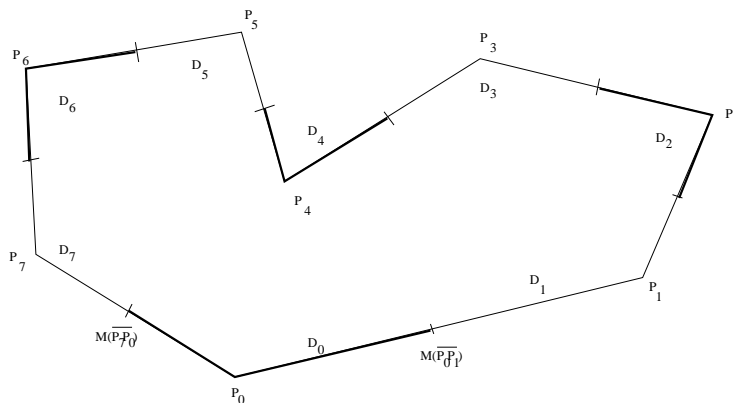


Abbildung 3.2: Zerlegung eines Polygons

3.2.2 Parkettierung einer Polyederoberfläche

Etwas schwieriger werden die Verhältnisse auf der zweidimensionalen Oberfläche eines Polyeders, der in den R^3 eingebettet ist. Alle folgenden Betrachtungen können sich glücklicherweise auf Dreiecksgraphen in der Ebene reduzieren, da die Dreiecke selbst laut Konstruktion alle eben sind und kein Gebrauch vom Parallelenaxiom oder

der Größe des Vollwinkels von 2π o.ä. auf die euklidische Ebene beschränkten Dingen Gebrauch gemacht wird.

Allgemein muss zunächst gefordert werden, dass die Zellengrenzen zweier benachbarter Dreiecke sich im gleichen Punkt an der gemeinsamen Kante treffen. Alles andere würde zu einer nur schwer zu begründenden Inhomogenität der Zellen führen. Analog zur Wahl dieses Punktes im ebenen Fall bei Polygonen sind die Kantenmittelpunkte damit schon Stützstellen $S_j := M(\overline{P_i P_j})$ für die zu bestimmenden Zellengrenzen, d.h.

$$\bigcup_{j \in N_1(i)} \left\{ P \in \overline{P_i P_j} \mid \overline{P_i P} < \frac{\overline{P_i P_j}}{2} \right\} \subset D_i \quad (3.4)$$

Dabei steht $N_1(i)$ für die Indexmenge der direkten Nachbarn von P_i . Erneut ist die Zuordnung der Zellengrenzen (mit dem Maß null) willkürlich. Es bleibt noch der Verlauf der Grenzen innerhalb der einzelnen Dreiecke zu diskutieren. Hier drängen sich Dreieckstransversalen von den Seitenmittelpunkten zu den gemeinsamen Schnittpunkten auf, da nur diese die gewünschte Symmetrieeigenschaften bezüglich aller drei Eckpunkte aufweisen. Zusätzliche Bedingung ist, dass dieser Verbindungsmittelpunkt V_j nicht außerhalb des Dreiecks liegen darf, denn sonst würden Flächenstücke außerhalb der direkten Nachbarschaft von P_i mit zu seiner Umgebung gerechnet werden, was zu neuen Konflikten beim gehäuftem lokalen Auftreten dieses Sachverhalts führen würde. Sei nun $n := \#\{j \mid j \in N_1(i)\}$ die Anzahl der direkten Nachbarecken und damit auch die der anliegenden Kanten bzw. Dreiecke von P_i . Sei weiterhin $O : \{1, \dots, n\} \rightarrow N_1(i)$ eine Ordnung der Indexmenge, so dass je zwei direkte Nachbarn $P_{O(j)}$ und $P_{O((j+1) \bmod n)}$ (zyklisch) und P_i selbst jeweils die Ecken eines Nachbardreiecks bilden (im mathematisch positiven Drehsinn). Das abgrenzende Polygon ∂D_i und die Zelle D_i selbst sind also, in noch recht allgemeiner Form, (siehe Abb.3.3):

$$\partial D_i := \bigcup_{j \in N_1(i)} \overline{S_{O(j)} V_{O(j)}} \cup \overline{V_{O(j)} S_{O((j+1) \bmod n)}} \quad (3.5)$$

$$D_i := \bigcup_{j \in N_1(i)} D_{ij} = \bigcup_{j \in N_1(i)} \Delta S_{O(j)} V_{O(j)} P_i \cup \Delta V_{O(j)} S_{O((j+1) \bmod n)} P_i \quad (3.6)$$

Dabei gelten folgende Nebenbedingungen:

$$S_j := M(\overline{P_i P_j}) \quad (3.7)$$

$$V_{O(j)} \in T_{ij} := \Delta P_{O(j)} P_{O((j+1) \bmod n)} P_i \quad (3.8)$$

Weiter wird definiert:

$$T_i := \bigcup_{j \in N_1(i)} T_{ij} \quad (3.9)$$

Die weitere Untersuchung reduziert sich nun auf die einzigen beiden mir bekannten Fälle von Dreieckstransversalen durch die Seitenmittelpunkte. Dies sind die Seitenhalbierenden und die Mittelsenkrechten.

1. Seitenhalbierende (baryzentrische Parkettierung)

Elementargeometrisch ist bekannt, dass sich die Seitenhalbierenden eines Dreiecks im Schwerpunkt³ schneiden. Er liegt als arithmetisches Mittel der drei

³daher der Name baryzentrisch; Baryzentrum, grch. Schwerpunkt

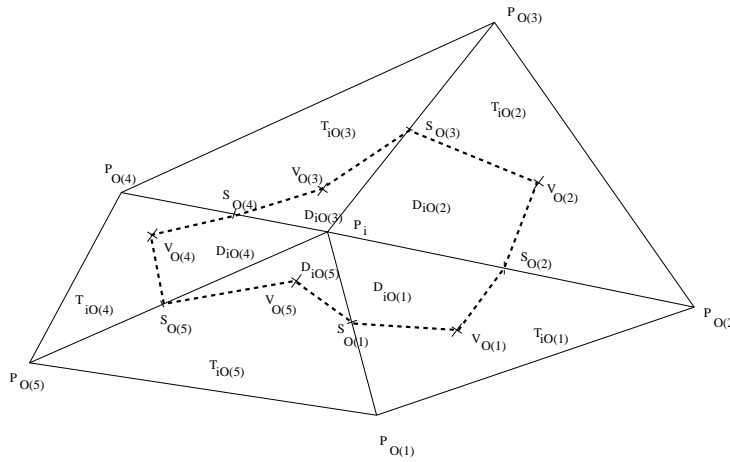


Abbildung 3.3: Parkettierung einer Polyederoberfläche in Umgebung einer Ecke (o.B.d.A. ebener Fall)

Eckpunkte immer im Innern des Dreiecks, denn ein Dreieck ist immer konvex. Die Nebenbedingung (3.8) ist damit automatisch erfüllt. Von Interesse ist der Anteil der Zellenfläche $A(D_{ij})$ an der Dreiecksfläche $A(T_{ij})$. Dabei genügt eine Betrachtung für ein Dreieck, da es in allen anderen analog so gilt. Zum Schluss ist nur noch eine Aufsummierung über alle Dreiecke nötig.

Es gilt:

$$A(D_{i,baryzentrisch}) = \sum_{j \in N_1(i)} A(D_{ij,baryzentrisch}) = \sum_{j \in N_1(i)} \frac{1}{3} A(T_{ij}) = \frac{1}{3} A(T_i) \quad (3.10)$$

Dass der Zellenteil jeweils genau ein Drittel der Dreiecksfläche einnimmt, sieht man sehr schnell mit Abb.3.4, in der die üblichen Bezeichnungen im Dreieck gewählt wurden. Aufgrund der Symmetrie und des festen Faktors $\frac{1}{3}$ sind dabei keine Missverständnisse möglich.

Die Seitenhalbierenden schneiden sich im Verhältnis 2:1, also $\overline{M_C S} = \frac{1}{3} \overline{M_C C}$. Nach dem Strahlensatz gilt dieses Verhältnis auch für den gleichliegenden Höhenschnitt: $h_{\Delta ABS} = \frac{1}{3} h_{\Delta ABC}$. Mit M_C als Mittelpunkt von \overline{AB} gilt $\overline{AM_C} = \frac{1}{2} \overline{AB}$. Also folgt nach der Flächenformel fürs Dreieck die Beziehung $A_{\Delta AM_C S} = \frac{1}{2} \overline{AB} \frac{1}{3} h_{\Delta ABC} = \frac{1}{6} A_{\Delta ABC}$. Eine analoge Rechnung ist für jedes der sechs durch die Seitenhalbierenden gebildeten Teildreiecke möglich. Damit ist die gesuchte Fläche $A_{AM_C S M_B} = A_{\Delta AM_C S} + A_{\Delta A M_C M_B} = \frac{1}{3} A_{\Delta ABC}$. Der Beweis ist erbracht.

2. Mittelsenkrechte (Voronoi-Zellen)

Verwendet man die Abschnitte der Mittelsenkrechten zwischen den Seitenmittelpunkten und dem Umkreismittelpunkt als Zellengrenzen, entstehen Voronoi-Zellen. Der Umkreismittelpunkt liegt nun nicht immer, Bedingung (3.8) erfüllend, im Dreieck, sondern nur bei spitz- und dem Grenzfall der rechtwinkligen Dreiecke, wo er als Folge der Umkehrung des Satzes des Thales die Hypotenuse halbiert.

Betrachten wir zunächst den anschaulicheren Fall der stumpfwinkligen Drei-

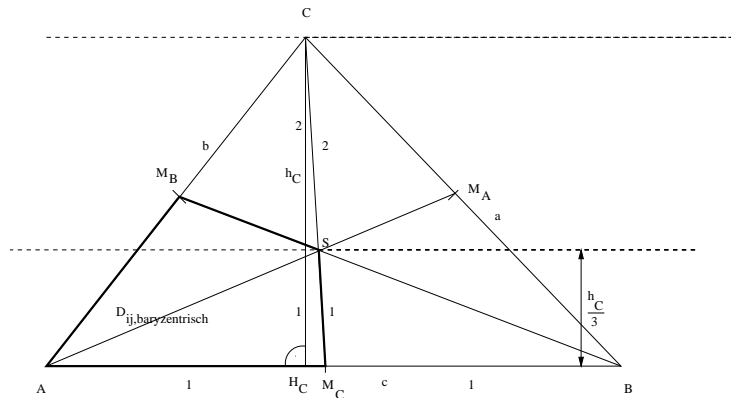


Abbildung 3.4: Zur Fläche des Sektors einer baryzentrischen Zelle

ecke. Hier wird die orthogonale Projektion von V_j auf die längste Seite des Dreiecks, also die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende, als Ersatz gewählt. Die Projektionslinie verläuft dabei entlang der Mittelsenkrechten dieser Seite, womit das Bild V_j' identisch mit dem Mittelpunkt der dem stumpfen Winkel gegenüberliegenden Seite wird (Abb.3.5). Im Dreieck gibt es nun noch zwei Trennstrecken, die je zwei Seitenmittelpunkte miteinander verbinden. Nach dem Ähnlichkeitssatz SWS sind die beiden dadurch abgegrenzten Dreiecke mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ ähnlich zum ganzen Dreieck, besitzen somit jeweils $\frac{1}{4}$ der Gesamtfläche, für das Parallelogramm mit dem stumpfen Dreiecksinnenwinkel bleibt $\frac{1}{2}A(T_{ij})$. Dem Zellenstück D_{ij} wird dann der Teil, in dem P_i (in unsere Skizze A, B oder C) liegt, zugeschlagen, also im Falles eines stumpfen Innenwinkels von T_{ij} bei P_i die halbe, sonst ein Viertel der Dreiecksfläche $A(T_{ij})$.

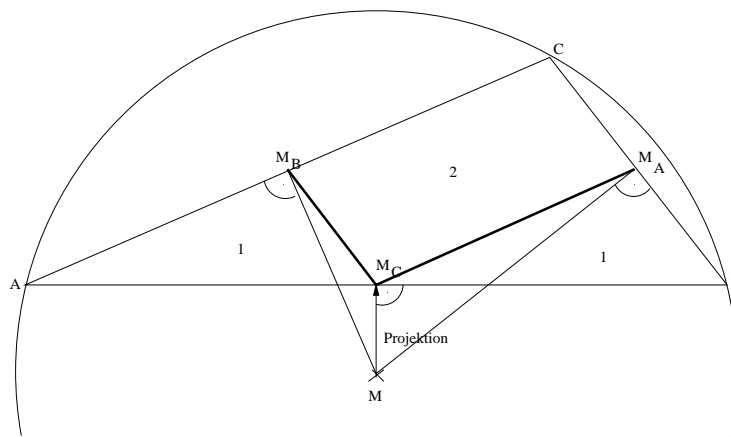


Abbildung 3.5: stumpfwinkliges Dreieck T_{ij} mit zugehörigem Teilstück einer Voronoi-Zelle: Flächen der Teilstücke verhalten sich wie 1:2:1

Wenden wir uns nun dem komplizierteren Fall spitzwinkliger Dreiecke zu. Betrachten wir dazu Abb.3.6. Als Bezeichnungen wurden erneut die allgemein üblichen gewählt. Aufgabe ist es, die Fläche des Vierecks AM_CMM_B zu bestimm-

men. Nach dem Kongruenzsatz SWS für Dreiecke gilt $\triangle AM_C M \cong \triangle M_C B M$ und $\triangle AM M_B \cong \triangle M_B M C$, die Dreiecke liegen sogar symmetrisch zur jeweiligen Mittelsenkrechten. Nun ist M der Umkreismittelpunkt und \overline{AB} ist Sehne des Umkreises. Der Zentriwinkel $\angle AMB$ hat nach dem Zentri-Peripheriewinkelsatz die doppelte Größe des zugehörigen Peripheriewinkels γ . Das bedeutet für den Winkel $\angle AMM_C$ aufgrund oben genannter Symmetrie die Größe von γ . Damit erhält man für die Ankathete $\overline{M_C M}$ im rechtwinkligen Dreieck $\triangle AM_C M$ die Beziehung $\overline{M_C M} = \overline{AM_C} \cdot \cot \gamma = \frac{c}{2} \cot \gamma$, woraus sich sofort die Fläche des ersten Teildreiecks $A(\triangle AM_C M) = \frac{\frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} \cot \gamma}{2} = \frac{c^2 \cot \gamma}{8}$ ergibt. Analoge Betrachtungen führen für das zweite Teildreieck auf $A(\triangle AM M_B) = \frac{b^2 \cot \beta}{8}$, und für die gesuchte Fläche des Vierecks erhalten wir schließlich folgende recht einfache Formel:

$$A(AM_C M M_B) = \frac{b^2 \cot \beta + c^2 \cot \gamma}{8} \quad (3.11)$$

Eine Summierung von (3.11) über alle n an P_i anliegenden Dreiecke liefert dann die Fläche einer Voronoi-Zelle, wobei in der Summierung der Sonderfall der stumpfwinkligen Dreiecke extra aufgeführt werden muss:

$$A(D_{i, Voronoi}) = \sum_{j \in N_1(i)} \begin{cases} \frac{b_j^2 \cot \beta_j + c_j^2 \cot \gamma_j}{8} & \text{falls } \alpha_j, \beta_j, \gamma_j < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} A(T_{ij}) & \text{falls } \alpha_j > \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{4} A(T_{ij}) & \text{falls } \beta_j > \frac{\pi}{2} \text{ oder } \gamma_j > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (3.12)$$

Dabei beziehen sich die indizierten üblichen Seiten- und Winkelbezeichnungen jeweils auf das Dreieck T_{ij} mit $\alpha_j := \angle P_{O(j)} P_i P_{O((j+1) \bmod n)}$. Siehe dazu auch Abb.3.6.

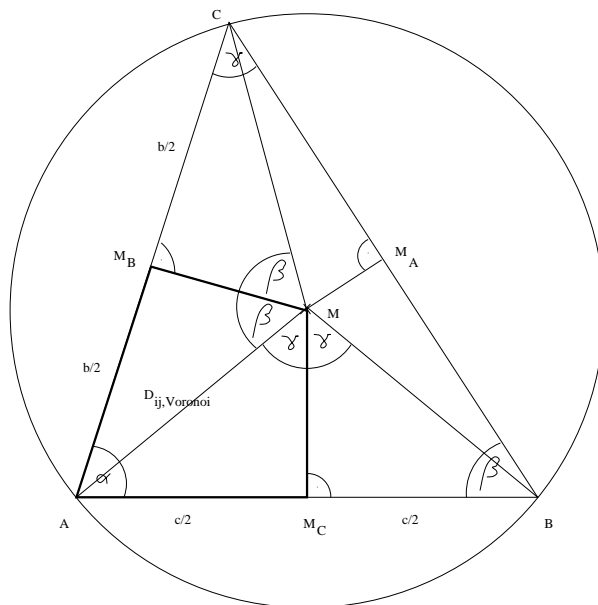


Abbildung 3.6: spitzwinkliges Dreieck T_{ij} mit zugehörigem Teilstück einer Voronoi-Zelle

3.3 Krümmung eines Polygons in der Ebene

Die Tangentenrichtung an einer Ecke B mit den Nachbarecken A und C ändert sich von AB auf BC . Dieser Winkel sei mit $\Delta\theta$ bezeichnet. Dann ist sofort ersichtlich, dass

$$\kappa_{ges}(B) = \Delta\theta = \pi - \beta \quad (3.13)$$

mit β als Innenwinkel $\angle CAB$ gilt. Dies steht in Übereinstimmung mit dem Umlaufsatz von Hopf (2.16), wie die folgende Rechnung für ein n -Eck E_n zeigt:

$$\kappa_{ges}(E_n) = \sum_{i=1}^n \kappa_{ges}(B_i) = n\pi - \sum_{i=1}^n \beta_i = n\pi - (n-2)\pi = 2\pi$$

Dabei wird die elementargeometrische Formel für die Innenwinkelsumme eines n -Ecks schnell durch Zerlegung in $n-2$ Dreiecke klar.

Die Frage, auf welchen Teil des Polygons diese Gesamtkrümmung zu verteilen ist, wurde schon im letzten Abschnitt beantwortet, die Polygonelemente werden jeweils halbiert. Damit ergibt sich der Schätzer:

$$\tilde{\kappa}(B) = \frac{2(\pi - \angle CAB)}{AB + BC} \quad (3.14)$$

3.4 Gaußsche Krümmung auf Polyederoberflächen

Wir werden nun versuchen, ähnlich geartete Schätzer auch für Polyederoberflächen anzugeben. Für die Gaußsche Krümmung K überlegen wir zunächst, wo auf der stückweise linearen Oberfläche nicht verschwindende Gesamtkrümmungen K_{ges} auftreten. Durch eine Zuordnung von Einflußbereichen, die eine Partitionierung der gesamten Oberfläche darstellen, und anschließende Division durch die Fläche des jeweiligen Bereichs lässt sich ein lokaler Schätzer konstruieren.

Zunächst ist K innerhalb aller Dreiecksflächen selbst gleich null, denn alle Normalschnitte mit einer Ebene sind Geraden mit einer Krümmung von null. Damit gilt $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ und $K = \kappa_1 \kappa_2 = 0$. Auf den Kanten tritt ebenfalls keine Gaußsche Krümmung auf, denn eine der beiden Hauptkrümmungsrichtungen verläuft in Richtung der Kante, also auf einer Geraden, und ist erneut null. Bleiben also noch die Ecken des Polyeders. Dort geht K jeweils gegen $\pm\infty$, da die Fläche, in der sich diese Krümmung konzentriert, infinitesimal klein ist. Mehr Sinn macht der Blick auf die Integralkrümmung K_{ges} an den Ecken, analog zum Vorgehen bei den Ecken eines Polygons.

In [PS1998] wurde dafür eine Formel angegeben. Die Integralkrümmung an einer Polyederecke ist gleich dem Exzess des Eckenwinkels, d.h. ein Vollwinkel minus die Summe aller an der Ecke anliegenden Dreiecksinnenwinkel.

$$K_{ges}(E) = 2\pi - \theta(E) = 2\pi - \sum_{i=1}^m \theta_i(E) \quad (3.15)$$

Qualitativ erscheint die Formel korrekt. Im flachen Fall liegen alle anliegenden Dreiecke in ein und derselben Ebene, damit wird die Winkelsumme gerade der Vollwinkel. Die Gesamtkrümmung ist also null. Durch schrittweises Verkleinern eines oder mehrerer Innenwinkel werden einzelne Dreiecke nach und nach auf eine Seite der bisher einheitlichen Ebene gedrückt. Es entsteht ein elliptischer Punkt, wofür die Formel

mit einer Winkelsumme kleiner als der Vollwinkel völlig richtig eine positive Integralkrümmung liefert. Schließlich lassen sich die Winkel auch vergrößern. Dies führt zum Ausscheren anliegender Kanten zu beiden Seiten der bisherigen Ebene. Der Eckpunkt wird hyperbolisch, und mit der größeren Summe erhalten wir auch formelmäßig eine dazu passende negative Integralkrümmung. Abschließend sollen auch noch die möglichen Grenzfälle betrachtet werden. Die Winkelsumme ist eine Summe endlich vieler⁴ Dreiecksinnenwinkel $\theta_i(E) \in [0; \pi]$, also gilt $\theta(E) \in [0; \infty)$. Insgesamt ergibt sich:

$$K_{ges}(E) \in (-\infty; 2\pi] \quad (3.16)$$

D.h. in etwa, dass die Integralkrümmung einer Polyederecke nur endlich elliptisch (nämlich im Fall einer 'Spitze'), aber beliebig stark hyperbolisch (man stelle sich z.B. einen Fächer mit einer hinreichend großen Zahl von dreieckigen Fächergliedern vor) werden kann. Das ist durchaus anschaulich.

Für eine noch notwendige quantitative Überprüfung der Gleichung empfiehlt sich das Gauß-Bonnet-Theorem (2.13). Eine Einbettung in den stetigen Fall gelänge mit Erfüllung der Gleichung des Theorems auch im diskreten Fall. Wir müssen also die Integralkrümmung des Polyeders PE durch Aufsummieren über alle seine Ecken bestimmen:

$$\begin{aligned} K_{ges}(PE) &= \sum_{i=1}^e K_{ges}(E_i) = e * 2\pi - \sum_{i=1}^e \sum_{j=1}^m \theta_j(E_i) \\ &= 2e\pi - \sum_{i=1}^f (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i) = (2e - f)\pi = (f + 4 - f)\pi \\ &= 4\pi \end{aligned} \quad (3.17)$$

Man beachte dabei die verwendeten Gleichungen (3.15) und (3.1) sowie die Summierungsumformung der Dreiecksinnenwinkel vom Bezug auf eine Ecke hin zum Bezug auf eine Fläche, also das Dreieck, wo sie dann wie gewöhnlich mit α , β und γ bezeichnet werden.

Eine Begründung für (3.15) über die Gauß-Abbildung wird ansatzweise in [PS1998] angegeben. Das Bild einer Polyederecke ist danach die sphärische konvexe Hülle der Einheitsnormalenvektoren aller anliegenden Dreiecksflächen. Der dadurch aufgespannte Raumwinkel korreliert mit der Gesamtkrümmung der Ecke. Klar wird dies, wenn man sich überlegt, dass ein Abrunden der Kanten an der Polyederecke gerade dem Bilden der sphärischen konvexen Hülle auf der Oberfläche der Einheitskugel S^2 entspricht. Alle weiteren mir bekannten Schriften (z.B. [MDSB2001] und [Smi2000]) verwenden ebenfalls diese Formel für die Integralkrümmung an einer Polyederecke.

Wie wir im Abschnitt im letzten Abschnitt gesehen haben, existieren nun zwei vernünftige Ansätze für die Zuordnung der Einflussbereiche zu den Ecken (3.10)(3.12). Dies resultiert in zwei, möglicherweise unterschiedlich guten, Schätzern für die Gaußsche Krümmung an einer Polyederecke mit m anliegenden Dreiecken:

$$\tilde{K}_{baryzentrisch}(E) = \frac{2\pi - \sum_{i=1}^m \theta_i(E)}{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^m A_{\Delta i}} \quad (3.18)$$

$$\tilde{K}_{Voronoi}(E) = \frac{2\pi - \sum_{i=1}^m \theta_i(E)}{A(D_{E,Voronoi})} \quad (3.19)$$

⁴Theoretisch mögliche Triangulierungen mit unendlich vielen Dreiecken sollen hier nicht mit betrachtet werden. Schon allein deshalb, weil unendliche Ecken- oder Flächenmengen zur oben erwähnten guten Darstellbarkeit mit Standarddatenstrukturen im Widerspruch stehen.

Untersuchungen zur Qualität der Schätzer verschieben wir jedoch auf später, zunächst sind weitere Schätzer zu konstruieren.

3.5 Mittlere Krümmung auf Polyederoberflächen

Mit den Überlegungen zu den Hauptkrümmungen aus dem letzten Abschnitt wird schnell klar, dass eine von null verschiedene mittlere Krümmung nur auf den Kanten des Polyeders auftritt. Zum Schätzen des Wertes beziehen wir uns auf die in [Smi2000] angegebene Methode. Betrachten wir die gemeinsame Seite \overline{BD} der beiden Dreiecke $\triangle ABD$ und $\triangle BCD$. Sei κ_1 die Hauptkrümmung entlang der Kante und κ_2 diejenige senkrecht dazu. Offenbar gilt $\kappa_1 = 0$ und mit (2.9) und (3.13) erhält man folgenden Schätzer:

$$\tilde{H} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{\kappa_2}{2} = \frac{\theta/l}{2} = \frac{\theta}{2l} \quad (3.20)$$

Dabei bezeichnen θ den Winkel zwischen den beiden Dreiecksnormalen und l die Länge des Einflussbereichs der Kante. Nun gilt aus Symmetriegründen:

$$l = \frac{h_{\triangle ABD}}{3} + \frac{h_{\triangle BCD}}{3} \quad (3.21)$$

Die Höhen, die sich natürlich jeweils auf die Seite \overline{BD} beziehen, ergeben sich elementargeometrisch über die Dreiecksflächen:

$$\begin{aligned} h_{\triangle ABD} &= \frac{A_{\triangle ABD}}{2\overline{BD}} \\ h_{\triangle BCD} &= \frac{A_{\triangle BCD}}{2\overline{BD}} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Fortlaufendes Einsetzen von (3.22) und (3.21) in (3.20) liefert schließlich:

$$\tilde{H} = \frac{3 * \angle(N_{\triangle ABD}, N_{\triangle BCD}) * \overline{BD}}{A_{\triangle ABD} + A_{\triangle BCD}} \quad (3.23)$$

Ein Nachteil dieses Ansatzes für die praktische Nutzung ist, dass er die Schätzwerte der mittleren Krümmung kantenbezogen liefert, wobei in den verwendeten Datenstrukturen meist nur der Ecken- und der Flächengraph auftreten. Eine darauf bezogene Zuordnung lässt sich jedoch leicht durch Mittelwertbildung über jeweils alle anliegenden Kanten erreichen. Zum besseren Verständnis siehe auch Abb.3.7.

3.5.1 Ein Ansatz über die Mittlere-Krümmungs-Normale

Eine alternative Methode, die zentral auf dem Gaußschen Theorem zur Umwandlung eines Gebiets- in ein Linienintegral beruht und einen eckenbezogenen H -Schätzer liefert, ist in [MDSB2001] angegeben. Folgende Formel zur Schätzung der mittleren Krümmung an einer Ecke mit dem Ortsvektor x_i ist dort angegeben:

$$\left| \tilde{H}(x_i) \right| = \frac{\left\| \sum_{j \in N_1(i)} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij})(x_j - x_i) \right\|}{4A(D_{i,Voronoi})} \quad (3.24)$$

Dabei bezeichnen $A(D_{i,Voronoi})$ die Fläche der Voronoi-Zelle um die Ecke x_i und $N_1(i)$ die Indexmenge der 1-Ring-Nachbarschaft der Ecke x_i , d.h. es wird jeweils über alle

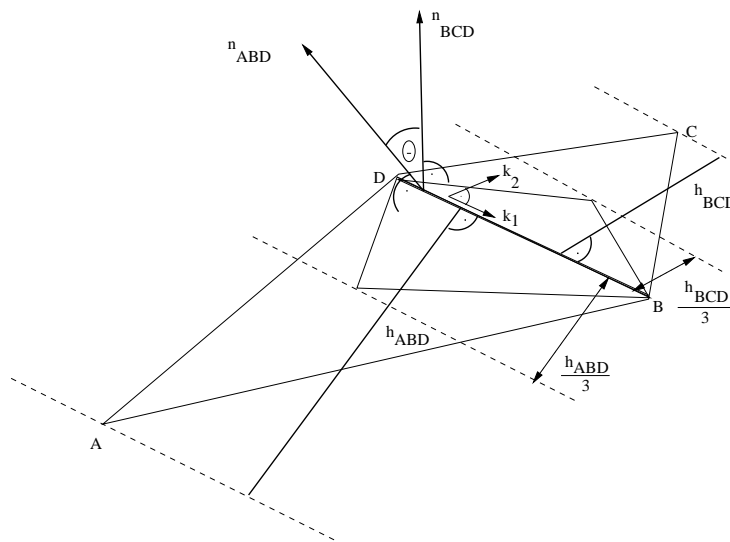


Abbildung 3.7: mittlere Krümmung an einer Kante

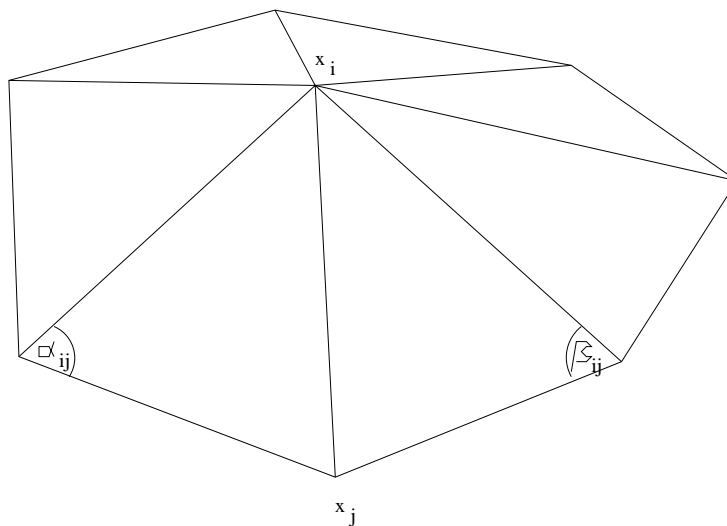


Abbildung 3.8: mittlere Krümmung an einer Ecke nach [MDSB2001]

Ecken, die über eine Kante mit der Bezugsecke verbunden sind, summiert. Die Winkel α_{ij} und β_{ij} sind die jeweils gegenüberliegenden Winkel in den beiden an die Kante von x_i nach x_j anliegenden Dreiecke (siehe Abb.3.8).

Zu beachten ist außerdem, dass der Summierung im Zähler eine Vektoraddition zu Grunde liegt. Das Vorzeichen des Summenvektors wird übernommen. Formelmäßig bedeutet dies Ergänzung des Vorzeichens der skalaren Multiplikation des Summenvektors mit dem Normalenvektor in x_i , um die vorzeichenbehaftete mittlere Krümmung zu erhalten.

Das hier betriebene Vorgehen erscheint insofern interessant, dass versucht wird, analog zum Vorgehen bei der Gaußschen-Krümmungs-Schätzung, eine Art "gesamte

mittlere Krümmung" zu definieren, die in (3.24) im Zähler auftritt. Klar ist, dass diese Größe die Dimension einer Länge haben muss, um durch Division durch eine zugeordnete Fläche eine einheitenkorrekte H -Schätzung erhalten zu können.

3.5.2 Ein Ansatz über das Divergenztheorem

In [BaS2001] wird ebenfalls die Umwandlung eines Gebiets- in ein Linienintegral genutzt, diesmal über das Divergenztheorem. Grundlage ist die oben erwähnte (2.18) mögliche Charakterisierung der mittleren Krümmung H als Divergenz der Einheitsnormalenvektoren. Dies liefert in der diskreten Version folgenden, recht einfach gebauten Schätzer:

$$\tilde{H} = -\frac{\sum_{i=1}^m \langle N_i, n_i \rangle \Delta l_i}{\sum_{i=1}^m A_{\Delta_i}} \quad (3.25)$$

Dabei bezeichnet m erneut die Anzahl der direkten Nachbarecken bzw. -dreiecke. Im Nenner steht somit die Gesamtfläche der 1-Ring-Nachbarschaft. N_i ist der Einheitsnormalenvektor der Fläche an der Ecke i , welcher nach Standardmethoden berechnet wird. Das Polygon im Raum, gebildet aus den Basen Δl_i der anliegenden Dreiecke mit der gemeinsamen Spitze, habe als Kurve im Raum die nach außen zeigenden Einheitsnormalenvektoren n_i (siehe auch Abb.3.9). $\langle \cdot, \cdot \rangle$ steht wie gewöhnlich für das Standardskalarprodukt.

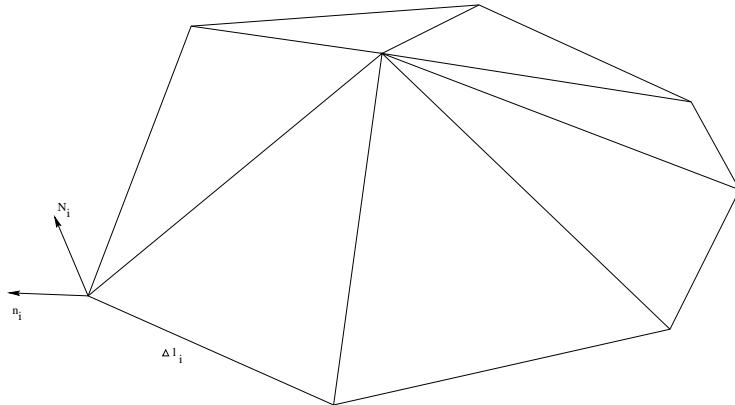


Abbildung 3.9: mittlere Krümmung an einer Ecke nach [BaS2001]

3.6 Krümmungsschätzung über lokale Regression

Abschließend sei noch auf eine ebenfalls wichtige und verbreitete Art von Krümmungsschätzern verwiesen. Sie ist z.B. in [KLM1998] überblicksmäßig dargestellt. Zunächst wählt man sich eine Umgebung des Knotens, der betrachtet werden soll. Üblich sind 1- oder 2-Ringe. Die Menge aller Knoten in einer solchen Umgebung dient dann als Basis für eine Regression. Die Modellannahme wird hierbei über eine Klasse von Oberflächen gemacht, die eine solchen Punktwolke in jedem Falle ausreichend genau annähern können soll. Bewährt hat sich eine Fläche 2.Ordnung mit der Gleichung

(in lokalen Koordinaten)

$$z = f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \quad (3.26)$$

Sie hat 6 Parameter. Um also diese eindeutig bestimmen zu können, sind 6 Punkte nötig, genauer gesagt nur 5, da das Absolutglied f keine Auswirkungen auf die Krümmungseigenschaften hat. Liegen weniger Knoten, kann z.B. so lange eine größere Umgebung gewählt werden, bis diese Mindestzahl erreicht ist. Bei einem Überschuss wird das lineare Gleichungssystem überbestimmt. Mit der Methode der kleinsten Quadrate lassen sich dann jedoch Lösungs-6-Tupel finden, die den quadratischen Abweichungsfehler minimieren, d.h. in diesem Sinne optimal den Daten genügen. Schließlich dienen die exakt berechenbaren Krümmungseigenschaften der approximierenden analytischen Oberfläche als Schätzer für die der gegebenen Fläche. Eine Rotation des Koordinatensystems so, dass die z -Achse in Normalenrichtung verläuft, sammelt die Informationen in nur drei neuen Parametern A , B und C :

$$z = f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 \quad (3.27)$$

Aus einer solchen Darstellung lassen sich nun leicht die exakten Krümmungswerte des Paraboloids, die hier als Schätzungen dienen, gemäß dem stetigen Fall (2.5), (2.8), (2.9) gewinnen:

$$\tilde{K}_{IR} = 4AC - B^2 \quad (3.28)$$

$$\tilde{H}_{IR} = A + C \quad (3.29)$$

Diese Schätzmethode ist auch im *Vista*-System im Befehl *vmop* implementiert. Dort werden alle Knoten innerhalb eines 2-Rings als Eingabe genutzt. Ihre Güte wird zusammen mit anderen erwähnten Ansätzen im nächsten Kapitel diskutiert. Für eine detailliertere Darstellung sei auf [SW1992] verwiesen.

Kapitel 4

Güte der diskreten Schätzer

4.1 Einleitung

Ein wichtiger Schritt ist es nun, die konstruierten Schätzer zu testen. Dort, wo die theoretischen Werte bekannt sind, ist selbstverständlich die relative Abweichung von diesen Werten, die möglichst klein sein soll, ein Qualitätskriterium. Das ist meist nur bei analytischen Körpern, wie z.B. Kugeln und Tori, der Fall. Auch die Streuung der Schätzwerte um die theoretischen (wahren) Werte soll minimal werden. Das bedeutet z.B., dass bei Kugeln als Oberflächen konstanter positiver Gaußscher Krümmung die Werte im Idealfall einer Einpunktverteilung oder wenigstens einer Normalverteilung mit sehr kleiner Standardabweichung σ folgen sollen.

Anders sieht es in der Praxis aus. Vom natürlichen Objekt der Gehirnoberfläche kennen wir nicht ihr quantitatives Krümmungsverhalten, dies ist gerade zu bestimmen. Allerdings ist eine intuitive Einteilung in Fundusregionen (konkave Bereiche), Kronenregionen (konvexe Bereiche) und Wände (Übergang konkav-konvex) möglich. Diese Klassifikation lässt dann einen Vergleich mit der rechnergestützt erbrachten zu. Die sowieso notwendige Verifikation stellt zugleich einen Teil der gestellten Aufgabe dar. Dazu mehr im Kapitel 7.

4.2 Würfel

Betrachten wir zunächst als sehr einfaches Beispiel eine Triangulierung der Oberfläche eines Einheitswürfels ($a = 1m$) mit 12 paarweise kongruenten Dreiecken. D.h. also, dass jede quadratische Seitenfläche des Würfels durch genau zwei rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke repräsentiert wird, vgl. Abb.(4.1). Dann entstehen jeweils genau vier Ecken mit fünf und mit vier anliegenden Dreiecken. Sie sollen an jetzt mit $E5$ und $E4$ bezeichnet werden.

Der Oberflächeninhalt beträgt $A_{ges} = 6a^2 = 6m^2$, das Volumen $V_{ges} = a^3 = 1m^3$, die Integralekrümmung ist laut (2.13) $K_{ges} = 4\pi$. Alle 8 Ecken sind lokal identisch, d.h. die Integralekrümmung verteilt sich gleichmäßig auf sie, $K_{ges}(E) = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$. Intuitiv optimal ist, dass sich die zugeordnete Fläche ebenfalls gleichmäßig verteilt. Dann gilt $A(E) = \frac{6m^2}{8} = \frac{3}{4}m^2$. Für einen optimalen Schätzer erhält man mit der diskreten Version von (2.14) $\tilde{K}_{optimal}(E) = \frac{K_{ges}(E)}{A(E)} = \frac{\pi}{2} : \left(\frac{3}{4}m^2\right) = \frac{2}{3}\pi m^{-2} \approx 2,09m^{-2}$. Halten wir dies als ersten Vergleichswert fest.

Sei nun dieser Würfel eine (sehr grobe) Näherung seiner Umkugel mit dem halben Radius seiner Raumdiagonalen $r = \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}m$. Dann ergibt sich für diese Kugel eine konstante Gaußsche Krümmung von $K = \frac{1}{r^2} = \frac{4}{3}m^{-2} \approx 1,33m^{-2}$ ihrer Oberfläche. Klar ist, dass dieser Wert von obiger Formel überschätzt wird, da die Ecken hier Stützstellen sind und die Sehnenflächen als Polygone von Stützstellen immer einen kleineren Flächeninhalt als die entsprechenden Teile der glatte Oberfläche haben, vgl. Abb.4.2. Der Fehler wird natürlich mit wachsender Anzahl von Stützstellen immer kleiner, so dass er dann vernachlässigt werden kann. In unserem sehr künstlichen Beispiel mit nur acht Stützstellen ist es besser, so zu triangulieren, dass die Dreiecke die glatte Oberfläche durchstoßen¹. Wählen wir z.B. eine Kugel mit dem Radius $r = \frac{r_{\text{Inkugel}} + r_{\text{Umkugel}}}{2} = \frac{\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{4}a = \frac{\sqrt{3}+1}{4}m$, ergibt sich eine Gaußsche Krümmung von $K = \frac{1}{r^2} = (16 - 8\sqrt{3})m^{-2} \approx 2,14m^{-2}$. Für eine solche Kugel ist unser Einheitswürfel im Hinblick auf eine gute Krümmungsschätzung eine sehr gute Näherung, der relative Fehler beträgt nur etwa 2,3%. Aufgrund dieser Unwägbarkeiten wollen wir die Qualität der Schätzer auf den oben notierten intuitiv optimalen Schätzer beziehen.

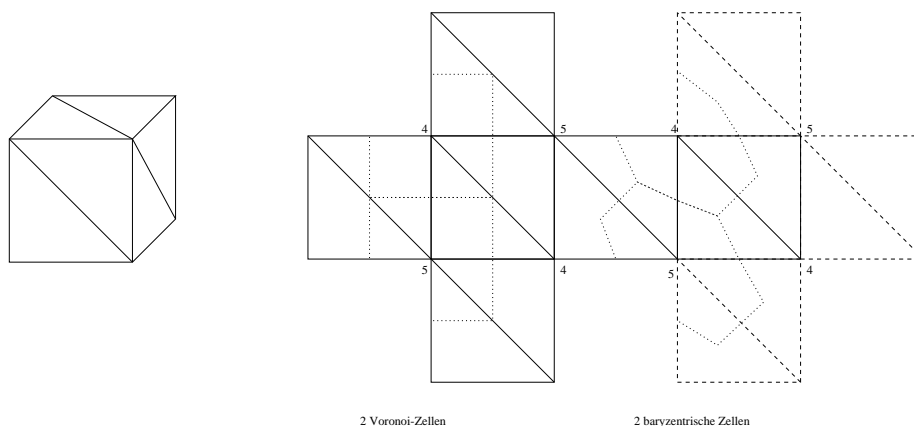


Abbildung 4.1: Schrägbild und Netz eines triangulierten Würfels mit zwei Möglichkeiten der Parkettierung

Wollen wir nun sehen, wie gut die Ergebnisse sind, die (3.18) und (3.19) bei unserem Würfel liefern. Alle Dreiecke haben den gleichen Flächeninhalt $A_{\Delta} = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}m^2$. Für eine baryzentrische Zelle ist eine Unterscheidung zwischen den beiden Eckentypen nötig. Man erhält $\tilde{K}_{\text{baryzentrisch}}(E4) = \frac{2\pi - 2\frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{3}4A_{\Delta}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{2}{3}m^2} = \frac{3\pi}{4}m^{-2} \approx 2,35m^{-2}$ und $\tilde{K}_{\text{baryzentrisch}}(E5) = \frac{2\pi - \frac{\pi}{2} - 4\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{3}5A_{\Delta}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{5}{6}m^2} = \frac{3\pi}{5}m^{-2} \approx 1,88m^{-2}$. Die relativen Fehler dieser Schätzungen betragen (bezogen auf den optimalen Schätzer) sind 12,5% und 10%.

Wie in Abb.4.1 zu erkennen ist, setzt sich eine Voronoi-Zelle aus vier Dreiecken und einem Quadrat (bei E5) bzw. zwei Dreiecken und zwei Quadraten (bei E4) zusammen. Symmetriebetrachtungen (Kantenmittelpunkte) ergeben eine vom Eckentyp unabhängige Fläche einer Voronoi-Zelle von $A_{\text{Voronoi}}(E) = 3 * \frac{a}{2} * \frac{a}{2} = \frac{3}{4}m^2$. Dies entspricht der beim optimalen Schätzer jeder Ecke zugeordneten Fläche. Da die In-

¹Daran wird auch deutlich, dass der Triangulierungs-Algorithmus, insbesondere bei nur wenigen Ecken und damit Dreiecken, einen großen Einfluss auf die Güte der Krümmungsschätzungen hat. Siehe dazu Abschnitt 1.7.

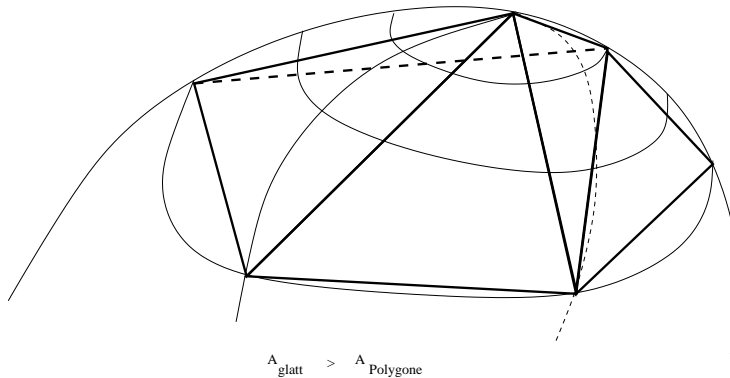


Abbildung 4.2: Fehler bei der Triangulierung einer glatten Oberfläche über Stützstellen

tegralkrümmung fehlerfrei geschätzt wird, ist schnell ersichtlich, dass $\tilde{K}_{Voronoi}(E) = \tilde{K}_{optimal}(E)$ gilt. Für unseren Einfachstfall eines Einheitswürfels mit nur 12 Dreiecken in der Triangulierung ist der K -Schätzer mit Voronoi-Parkettierung (3.19) optimal im Sinne der homogenen Verteilung der Krümmung auf die acht Ecken. Später wird man sehen, ob die kompliziertere Flächenformel einer Voronoi-Zelle (3.12) allgemein, und nicht nur in diesem konstruierten Beispiel, bessere Resultate als die baryzentrische Variante (3.10) liefert. Angemerkt sei noch, dass ein Test der im Folgenden mit einbezogenen Methode der lokalen Regression hier nicht durchgeführt wird, da die dort verwendeten größeren Umgebungen sich am zwölfknotigen Würfel jeweils selbst überschneiden, was schon außerhalb der intuitiven Sinnhaftigkeitsgrenzen liegt.

4.3 Kugel

Im nächsten Schritt sollen uns vier verschieden genaue Triangulierungen der Oberfläche einer Einheitskugel ($r = 1m$) interessieren. Die Vergitterungen der Einheitskugel resultieren aus dem Programm *vsphere* der *Vista*-Bibliothek. Die theoretisch zu erwartenden Werte liegen somit bei $K = \frac{1}{r^2} = 1m^{-2}$ und $H = \sqrt{K} = 1m^{-1}$, die Kugeloberfläche ist überall in alle Richtungen gleich stark gekrümmt. Verglichen werden sollen die recht ausführlich diskutierten zu den Parkettierungen gehörenden Formeln (3.18), (3.19) und (3.24) einschließlich der sich direkt aus (3.24) ergebenden baryzentrischen Variante eines H-Schätzers:

$$\left| \tilde{H}_{baryzentrisch}(x_i) \right| = \frac{\left\| \sum_{j \in N_1(i)} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij})(x_j - x_i) \right\|}{4A(D_{i,baryzentrisch})} \quad (4.1)$$

Außerdem dienen als dritte Variante die hier nur am Rande erwähnten, jedoch häufig implementierten, auf (3.26) beruhenden Ansätze über eine lokale Regression. Für den Test dieses Ansatzes wurde das Programm *vmop* aus *Vista* genutzt, während ich selbst die beiden anderen Varianten implementiert habe. Die beiden Tabellen 4.1 und 4.2 fassen die Ergebnisse mit jeweils angegebenem Mittelwert μ und Standardabweichung σ zusammen. Dabei wurde auf eine extra Aufführung der relativen Fehler verzichtet, da sich diese durch die Normierung bei der verwendeten Einheitskugel sofort ablesen lassen.

| <i>K</i> -Schätzungen | baryzentrisch | Voronoi | lokale Regression |
|----------------------------|---|---|---|
| 100 Knoten, 196 Dreiecke | $\mu = 1,04m^{-2}$ $\sigma = 0,06m^{-2}$ | $\mu = 1,03m^{-2}$ $\sigma = 0,00m^{-2}$ | $\mu = 1,42m^{-2}$ $\sigma = 0,15m^{-2}$ |
| 300 Knoten, 596 Dreiecke | $\mu = 1,01m^{-2}$ $\sigma = 0,06m^{-2}$ | $\mu = 1,01m^{-2}$ $\sigma = 0,00m^{-2}$ | $\mu = 1,13m^{-2}$ $\sigma = 0,05m^{-2}$ |
| 1000 Knoten, 1996 Dreiecke | $\mu = 1,03m^{-2}$ $\sigma = 0,15m^{-2}$ | $\mu = 1,01m^{-2}$ $\sigma = 0,05m^{-2}$ | $\mu = 1,02m^{-2}$ $\sigma = 0,08m^{-2}$ |
| 5000 Knoten, 9996 Dreiecke | $\mu = 1,16m^{-2}$ $\sigma = 0,50m^{-2}$ | $\mu = 1,08m^{-2}$ $\sigma = 0,33m^{-2}$ | $\mu = 0,91m^{-2}$ $\sigma = 0,19m^{-2}$ |

Tabelle 4.1: Güte von *K*-Schätzern bei verschiedenen Triangulierungen der Einheitskugel

| <i>H</i> -Schätzungen | baryzentrisch | Voronoi | lokale Regression |
|----------------------------|---|---|---|
| 100 Knoten, 196 Dreiecke | $\mu = 1,00m^{-1}$ $\sigma = 0,06m^{-1}$ | $\mu = 1,00m^{-1}$ $\sigma = 0,00m^{-1}$ | $\mu = 1,20m^{-1}$ $\sigma = 0,06m^{-1}$ |
| 300 Knoten, 596 Dreiecke | $\mu = 1,00m^{-1}$ $\sigma = 0,06m^{-1}$ | $\mu = 1,00m^{-1}$ $\sigma = 0,00m^{-1}$ | $\mu = 1,06m^{-1}$ $\sigma = 0,02m^{-1}$ |
| 1000 Knoten, 1996 Dreiecke | $\mu = 1,03m^{-1}$ $\sigma = 0,15m^{-1}$ | $\mu = 1,00m^{-1}$ $\sigma = 0,05m^{-1}$ | $\mu = 1,01m^{-1}$ $\sigma = 0,04m^{-1}$ |
| 5000 Knoten, 9996 Dreiecke | $\mu = 1,16m^{-1}$ $\sigma = 0,50m^{-1}$ | $\mu = 1,08m^{-1}$ $\sigma = 0,33m^{-1}$ | $\mu = 0,96m^{-1}$ $\sigma = 0,19m^{-1}$ |

Tabelle 4.2: Güte von *H*-Schätzern bei verschiedenen Triangulierungen der Einheitskugel

Auffallend ist die Überlegenheit der Voronoi-Methode (3.19) und (3.24). Sie ist, wie schon beim Einheitswürfel, die beste und auch absolut gesehen eine sehr gute Wahl. Völlig ungeeignet erscheint die lokale Regression. Die Methode enthält, wie in [KLM1998] erklärt, einen systematischen Fehler für Kugeln und Zylinder, denn das Rotationsparaboloid nimmt in der Spitze, wo der Schätzwert dann entnommen wird, seine maximale Krümmung an, was zu einer methodisch bedingten Überschätzung der Krümmung von z.B. Kugeln führt. Je mehr Dreiecke zur Approximation genutzt werden, desto mehr ähneln die zur Schätzung genutzten Umgebungen Ebenen, was den Einfluss dieses Verfahrensfehlers eindämmt. In allen betrachteten Fällen ist *Voronoi* besser als *baryzentrisch*.

Für die feinste getestete Vergitterung ist allerdings eine Umkehrung des Trends zu beobachten. Alle Verfahren werden auf einmal schlecht bis sehr schlecht, wobei die lokale Regression noch am besten abschneidet. Die erste Tatsache lässt sich auf eine stark angestiegene Inhomogenität der Triangulierung, was letztendlich ein signifikantes Rauschen in Bezug auf eine ideale Kugeloberfläche darstellt, zurückführen. Diese Störungen wirken schwächer auf die nur noch sehr schwach durch den methodischen Fehler belastete lokale Regression, da diese mit dem 2-Ring von Knoten eine größere lokale Umgebung für die Schätzung verwendet.

Zusammenfassend muss man sagen, dass *Voronoi* erneut insgesamt die besten Knoten erhält.

4.4 Zylinder

Die nächste Testoberfläche sei ein Zylindermantel vom Radius $r = 1m$. Damit wird die eine Hauptkrümmung in tangentialer Richtung $\kappa_1 = 1m^{-1}$, während die andere als κ_2 verschwindet, da eine Gerade die Erzeugende dieser Rotationsfigur darstellt. Für die theoretisch zu erwartenden Werte erhält man sofort $K = 0$ und $H = 0,5m^{-1}$. Die Vergitterung erfolgte durch ein selbst geschriebenes Hilfsprogramm, das die Anzahl der Stützstellen n auf einem Kreisumlauf als Parameter nimmt. Äquidistant verteilt ergibt sich daraus ein n -Eck als uniforme Schnittfigur. Gleichliegende n -Ecke werden dann jeweils zwischen zwei direkt benachbart liegenden Schnitten durch $2n$ paarweise kongruente, rechtwinklige Dreiecke zu einer triangulierten Oberfläche erweitert, Abb.4.3.

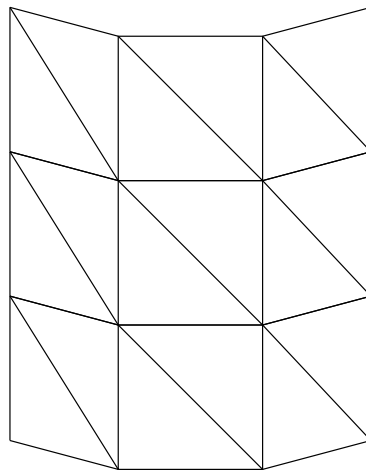


Abbildung 4.3: Ausschnitt der Vergitterung eines Zylindermantels

Erneut wurden die drei Verfahren des letzten Abschnitts auf die Testoberfläche angewandt. Zu beachten ist dabei die strenge Uniformität der Umgebungen², was jegliche statistische Untersuchungen durch die implizierte Gleichartigkeit der Ergebnisse entbehrlich macht. Somit ist jeweils nur der einzig auftretende Wert angegeben.

| (H;K) | baryzentrisch | Voronoi | lokale Regression |
|----------|----------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| $n = 10$ | $(0,50m^{-1}; 0,00m^{-2})$ | $(0,50m^{-1}; 0,00m^{-2})$ | $(0,10m^{-1}; -1,91m^{-2})$ |
| $n = 30$ | $(0,50m^{-1}; 0,00m^{-2})$ | $(0,50m^{-1}; 0,00m^{-2})$ | $(0,43m^{-1}; -0,19m^{-2})$ |
| $n = 50$ | $(0,50m^{-1}; 0,00m^{-2})$ | $(0,50m^{-1}; 0,00m^{-2})$ | $(0,48m^{-1}; -0,05m^{-2})$ |

Tabelle 4.3: Güte von Krümmungsschätzern an einer Einheitszylinder-Oberfläche

Zuerst sieht man, dass sowohl *baryzentrisch* als auch *Voronoi* für alle Stufen n das exakte, theoretisch zu erwartende Resultat liefern. Baryzentrische und Voronoi-Zellen haben hier jeweils die gleiche Fläche, nämlich ein Drittel der Flächensumme

²Ausgeschlossen bleiben müssen bei der Auswertung die oben und unten auftretenden Randdreiecke. Dies ist zulässig, und stellt keine Verfälschung der Ergebnisse dar, da unsere Testoberfläche ein unendlicher ‚aus der Rotation einer Geraden um eine im Abstand r parallel liegende Rotationsachse entstandener Zylindermantel, sein soll.

der jeweils sechs Nachbardreiecke. Da diese Eigenschaft im baryzentrischen Fall allgemeingültig ist (3.10), muss sie nur noch für die spezielle Voronoi-Zelle gezeigt werden. Abb.4.4 verdeutlicht die Beziehung. Sie gilt auch für den allgemeineren Fall von Dreiecken, die paarweise Rechtecke statt Quadrate formen, da sich dann durch die Streckung alle Flächen im gleichen Verhältnis, dem Streckungsfaktor, ändern. Die Werte der lokalen Regression konvergieren mit steigendem n nur sehr langsam gegen die korrekten. Bei der Gaußschen Krümmung tritt durchweg das nicht korrekte negative Vorzeichen auf.

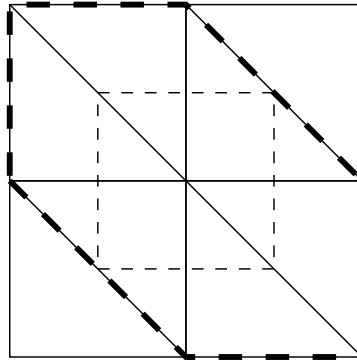


Abbildung 4.4: Voronoi-Zelle in der abgerollten Triangulierung einer Zylinderoberfläche

4.5 Zusammenfassung

Wir haben festgestellt, dass *Voronoi* das theoretisch beste der drei untersuchten Verfahren ist. In der Praxis sind die Verhältnisse jedoch etwas anders. Es zeigt sich, dass der Vergitterungsalgorithmus (siehe Kapitel 1.7) einen starken Einfluss auf die Anwendbarkeit von diskreten Krümmungsschätzern hat. Die nicht-glatte, blockige Struktur der Triangulierungen, zu der alle MC-basierten Verfahren führen, macht den Einsatz von *Voronoi* bzw. *baryzentrisch* sehr fragwürdig. Gerade weil sie so exakte Ergebnisse liefern, sind sie in der realen Welt etwas ungeeignet. Wahrscheinlich sind diese Verfahren besser für die glatteren, durch SNG erzeugten Netze brauchbar. Für unser MT-Verfahren ist jedoch der Einsatz der weniger lokalen (2-Ring statt 1-Ring als Umgebung), eine Glättung schon enthaltenden *lokalen Regression* angebracht. Das passiert auch im nächsten Kapitel.

Kapitel 5

Kamm- und Tal-Linien

5.1 Überblick

Mit den nun vorliegenden Krümmungsschätzern, sollte es möglich sein, Linien maximaler betragsmäßiger Krümmung, also Kamm- und Tal-Linien, aus einer triangulierten Oberfläche zu extrahieren. Auf ihrer Basis sollte sich später die Segmentierung vornehmen lassen. Dabei werden natürlicherweise die Kammlinien als Zentral-Linien der Kronenbereiche sowie die Tal-Linien als solche der Fundusregionen dienen. Weiter ist zu sehen, inwieweit sich die Wandbereiche als Übergänge ebenfalls charakterisieren lassen.

Mit (2.1) wird klar, dass man dabei die Nullstellen oder -linien der dritten Ableitungen der Kurve bzw. des Bildes für das Finden lokaler Extrema der Krümmung betrachten muss. Vom theoretischen Standpunkt aus sind dabei keine großen Schwierigkeiten zu erwarten. Allerdings werden in der Praxis mit verschiedenen Fehlern behaftete Daten verwendet (besonders trotz Filterung in der Vorverarbeitung verbleibende Messfehler aus dem MR-Bild sowie Diskretisierungsfehler sowohl aus der Bildgebung - bedingt durch die begrenzte Voxelauflösung¹ - als auch aus dem nachfolgenden Verarbeitungsschritt der Triangulierung der Oberfläche). Leider tritt somit immer ein Rauschen auf, dass beim Bild selbst kaum stören mag, jedoch nach dem dreimaligen aufrauenden Verfahren des Differenzierens fast immer zu unerwünschten Störungen (Artefakten) führt. Die Fehler schaukeln sich in die Höhe.

Eine Lösung dieses Problems kann zwei- oder einstufig geschehen: durch einen Vorverarbeitungsschritt des Glättens oder durch Verwenden von robusten (also rauschtoleranten) Algorithmen. Davor sind aber noch ein paar Definitionen notwendig.

5.2 Wichtige Definitionen

Sei $G(V, E)$ ein gerichteter Graph mit einer endlichen, nichtleeren Knotenmenge $V \subset \mathbb{R}^3$, deren n Elemente Tripel reeller Zahlen, die den Ortsvektoren der Knoten im euklidischen Raum entsprechen, sind. Dann ist die Kantenmenge $E \subseteq V \times V$ ebenfalls endlich (sie habe m Elemente), und für die beiden Mengen können Indizes vergeben werden:

$$V = \{v_i \mid 1 \leq i \leq n\} \tag{5.1}$$

¹Die übliche Voxelgröße liegt im Moment bei $(1mm)^3$ am lebenden Probanden. Am toten Hirn lässt sie sich auf $(0,25mm)^3$ senken [Kru2002], bedingt durch die nun mögliche Langzeitfixierung.

$$E = \{e_j \mid 1 \leq j \leq m\} \quad (5.2)$$

Eine solcher Graph G eignet sich offenbar, um einen Körper im Oberflächenmodell (vgl. Abschnitt 1.3) mathematisch zu beschreiben. Allerdings wird das Modell hier nur knotenbezogen, ohne Bezug auf die Dreiecksflächen betrachtet. Das ist jedoch für die anschließend zu führenden Betrachtungen ausreichend. Weiter ergibt sich, dass in unserem speziellen Anwendungsfall der Repräsentation einer triangulierten Oberfläche als Knotengraph, dieser *zusammenhängend* (da nur *ein* Objekt betrachtet wird) und mit der Topologie-Annahme aus Abschnitt 3.1 auch *planar* ist. Außerdem verlaufen die Kanten bidirektional, da den Dreiecksseiten keine Orientierungen zugeordnet sind, d.h. es wird eigentlich ein ungerichteter Graph simuliert.

Ein *Weg* vom Knoten v_1 zum Knoten v_k ist eine Folge von Knoten $v_1 \dots v_k$, wobei dieser nur auf Kanten verlaufen darf, d.h. $[v_i, v_{i+1}] \in E, i = 1 \dots k-1$. Mit einer Kostenfunktion $P : E \rightarrow R^+$ kann zunächst jeder Kante ein nicht negatives, reelles Gewicht zugeordnet werden. Die *Länge eines Weges* ist die Summe aller unterwegs auftretenden Kosten: $l(v_1 \dots v_k) = \sum_{i=1}^{k-1} P([v_i, v_{i+1}])$. Dann ist der *kürzeste Weg* von v_1 zu v_k derjenige, der die unterwegs erhobenen Kosten minimiert: $l(v_1 \dots v_k) \rightarrow \min$. Den Wert der Längenfunktion an der Minimalstelle bezeichnen wir als *Abstand* $d(v_1, v_k)$ zwischen v_1 und v_k im Graphen G mit der Kostenfunktion P .

5.3 Rauschverminderung durch Glätten

Der sehr direkte Ansatz der Lösung des 'Rauschproblems' durch einen vorgeschalteten Verarbeitungsschritt hat einige Schwächen. In der Praxis wird es so sein, dass unterschiedliche vorgelegte Triangulierungen ein verschieden starkes Rauschen mit sich bringen. Damit muss jedesmal neu die Frage nach der Stärke des Glättens beantwortet werden. Wann verschwinden nur die unerwünschten Artefakte, wann gehen wesentliche Informationen mit verloren? Natürlich sind in einem gewissen Maße adaptive Algorithmen vorstellbar, die das Problem wohl teilweise lösen könnten, doch prinzipiell ist ein solches Vorgehen keine gute Lösung.

5.4 Ein robuster Algorithmus für Kamm- und Tal-Linien

Fortgeschrittene Algorithmen enthalten schon selbst eine Rauschunterdrückung. Ein sehr moderner und mathematisch recht anspruchsvoller Ansatz über anisotrope Diffusion ist u.a. in [DR2000] zu finden. Damit gelingt weitgehend ein Ausfiltern des Rauschens bei gleichzeitiger Beibehaltung scharfer Kanten.

Hier wollen wir uns jedoch auf einen eher klassischen Ansatz über kürzeste Wege in Graphen, wie in [BaS2001] geschehen, beschränken. Die Idee ist so einfach wie erfolgversprechend. Schon 1959 wurde von *Dijkstra* das Problem kürzester Wege in Graphen gelöst. Für die Generierung einer Kammlinie wähle man also einfach einen geeigneten Start- und Endknoten sowie eine Kostenfunktion P , die Berge 'belohnt' und Täler 'bestraft'. Dann ist der kürzeste Weg als ein guter Vorschlag für eine Kammlinie zu erwarten. Wie bei [BaS2001] wählen wir die mittlere Krümmung H als zu extremierende Größe. Sie streut als arithmetisches Mittel der Hauptkrümmungen weniger als deren Produkt K^2 , ist also im Sinne der Rauschunterdrückung besser. Die Vorgabe

²Das hat sich auch bei unseren Tests der diskreten Schätzer in Abschnitt 4 gezeigt.

eines Normwertes M für die mittlere Krümmung führt mit einer stärkeren Gewichtung größerer Abweichungen direkt auf

$$P_V(v_i) := \left(\tilde{H}(v_i) - M \right)^2 \quad (5.3)$$

Diese Kostenfunktion ist knotenbezogen, doch über die Bijektion zwischen Zielknoten und Kante wird sie sehr leicht kantenbezogen, wie es für einen Dijkstra-Algorithmus notwendig ist:

$$P(e_i = [v_j, v_k]) := P_V(v_k) \quad (5.4)$$

Es bleiben noch die Probleme, was als Normwert M sowie als Start- und Zielknoten zu wählen ist. Möglich, aber bei einer stark strukturierten kompletten Hirnoberfläche wenig praktikabel, ist vielmaliges Anklicken der jeweiligen beiden Knoten in der 3D-Ansicht am Bildschirm. Wünschenswert ist eine vollautomatische Extraktion. Dies kann z.B. über eine lokale Extremwertsuche in den verschiedenen Teilen der Hirnoberfläche geschehen, wobei dann Extrema direkt benachbarter Regionen über minimale Pfade verbunden werden. Dabei ist der Standardansatz, die drei Dimensionen Höhe, Breite und Tiefe des die Knotenmenge umschließenden Quaders jeweils gleichmäßig in p Abschnitte aufzuteilen. Dies führt zunächst auf die bezüglich der Algorithmuskomplexität recht ungünstige Zahl von p^3 Regionen. Allerdings können viele davon in der Praxis schnell ausgeschlossen werden. Zu erwähnen sind dabei die Abwesenheit von Knoten überhaupt sowie ein zu geringer Anteil von Knoten mit vorzeichenkorrekter Krümmung. Die Symmetrie der Kosten ist durch die Definition in (5.4) zwar verletzt, allerdings genügt es in der Anwendung, Pfade nur vom Knoten i zum Knoten j und nicht auch noch in umgekehrter Richtung zu berechnen. Als Normwert M schlage ich den Mittelwert aus den Schätzern der mittleren Krümmung am Start- und am Zielknoten vor.

Für die Tal-Linien gehe man analog vor. Es sind dann die entgegengesetzten Extrema in den jeweiligen Regionen als Randknoten der Linien zu verwenden.

Im Ergebnis dieses Schrittes liegen dann zwei disjunkte Teilmengen der Knotenmenge vor, die jeweils alle zu Kamm- bzw. Tal-Linien gehörenden Knoten umfassen:

$$\begin{aligned} V_{\text{Kammlinien}} &\subset V \\ V_{\text{Tallinien}} &\subset V \end{aligned} \quad (5.5)$$

Der nächste, sich anbietende Schritt ist die Erweiterung dieser beiden Mengen so, dass sie zusammen die Knotenmenge auch überdecken, also eine Zerlegung dieser vorliegt. Das untersuchen wir im nächsten Kapitel.

Kapitel 6

Unterteilung

6.1 Einleitung

Mit dem im letzten Abschnitt eingeführten Konzept der Kamm- und Tallinien ist eine mögliche Grundlage für die beabsichtigte Unterteilung der Hirnoberfläche geschaffen. Die Knotenmenge V soll in Äquivalenzklassen V_i von Knoten zerlegt werden, wobei diese paarweise disjunkt und die Menge V überdeckend sind:

$$\begin{aligned}\bigcap_i V_i &= \emptyset \\ \bigcup_i V_i &= V\end{aligned}\tag{6.1}$$

Zunächst ist deren Anzahl zu diskutieren. Wünschenswert wäre eine 3-Segmentation in Kronen-, Fundus- und Wandregionen, doch dies ist im allgemeinen Fall möglicherweise nur schwer zu realisieren. Also begnügen wir uns zunächst mit einer Vernachlässigung der Übergangsbereiche - dies entspricht einer 2-Segmentation ausschließlich in Kronen- und Fundusregionen. In diesem einfacheren Fall können zugleich auch allgemeine Probleme der Unterteilung verständlicher werden.

6.2 2-Segmentation

Als einen plausiblen Indikator für die Zuordnung zu einer Kronen- oder Fundusregion wählen wir das Vorzeichen der Differenz der Abstände zur nächsten Kamm- und zur nächsten Tal-Linie, wobei die bei Gleichheit der Abstände willkürlich, aber fest (hier der Kronenregion) zugeordnet wird:

$$\begin{aligned}v_i \in V_{Krone} &\Leftrightarrow d(v_i, V_{Kammlinien}) - d(v_i, V_{Tallinien}) \geq 0 \\ v_i \in V_{Krone} &\Leftrightarrow d(v_i, V_{Kammlinien}) - d(v_i, V_{Tallinien}) < 0\end{aligned}\tag{6.2}$$

Die Kostenfunktion P_{Segm} ordnet jeder Kante ihre euklidische Länge zu. Der Abstand eines Knotens zu einer Menge ist definiert als das Minimum seines Abstandes zu allen Knoten der Menge. Formal können wir dies so festhalten:

$$P_{Segm}(e_i = [v_j, v_k]) := \|v_j - v_k\|\tag{6.3}$$

$$d(v_i, W) := \min_{w \in W \subseteq V} d(v_i, w) \quad (6.4)$$

Alle anderen Begrifflichkeiten wurden schon hinreichend genau im Abschnitt 5.2 erklärt. Der erneut verwendete Dijkstra-Algorithmus kann abgebrochen werden, sobald eine Tal- bzw. Kammlinie erreicht ist, denn er ist so konstruiert, dass die Knoten schon nach ihren Abständen geordnet ausgegeben werden.

Befindet sich ein Kamm in größerer Nähe als das nächste Tal, bejahen wir die Hypothese des Zuschlags zu einer Kronenregion - im umgekehrten Fall kann die Alternativhypothese der Zugehörigkeit zu einer Fundusregion angenommen werden. Die Zweiwertigkeit der Entscheidung lässt uns sofort zum einzig sinnvollen Schwellwert Null kommen.

6.3 3-Segmentation

Will man für die fortgeschrittene Stufe der 3-Gruppen-Unterteilung wiederum die Abstandsdifferenz zur nächsten Kamm- und Tal-Linie nutzen, tritt die Schwierigkeit des Findens passender Schwellwerte oder andersartiger Abgrenzungen auf. Wann kann man von einem Übergangsbereich, einer Wand, sprechen? Für einen speziellen Datensatz kann die Frage über einen Regelkreis unter Einbeziehung des Menschen recht gut gelöst werden. Unser Ziel war es jedoch, den Segmentationsprozess auf möglichst allgemeingültiger Ebene zu automatisieren.

Kapitel 7

Ergebnisse

In den Abbildungen 7.1 bis 7.5 sind die extrahierten Fundusbereiche in roten und die Kronenbereiche in grauen Farbtönen dargestellt.

7.1 Beispielsegmentationen analytischer Oberflächen

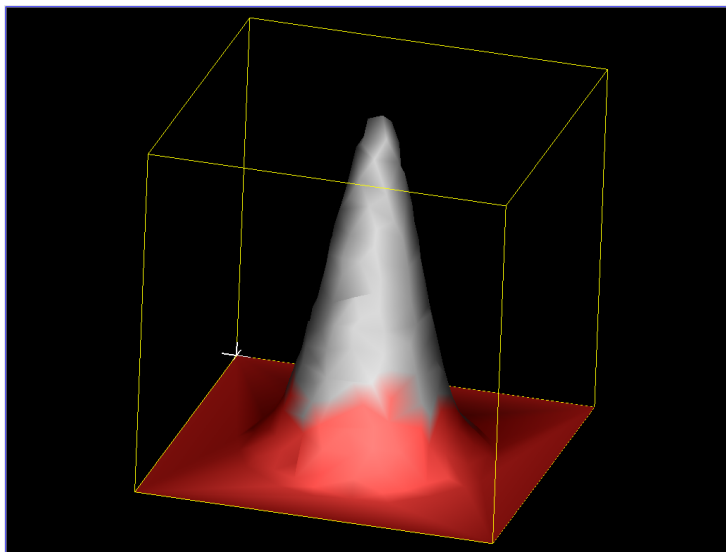


Abbildung 7.1: Segmentation eines einzelnen Berges

Die Gleichung der Fläche des in Abb.7.1 einzelnen Berges ist:

$$z(x,y) = 59 \exp \frac{-(x-30)^2 - (y-30)^2}{100} \quad (7.1)$$

Der Rotationskörper in Abb.7.2 wurde über folgenden Radius-Höhen-Zusammenhang konstruiert:

$$r(z) = 5 \sin \frac{z}{2,5} \quad (7.2)$$

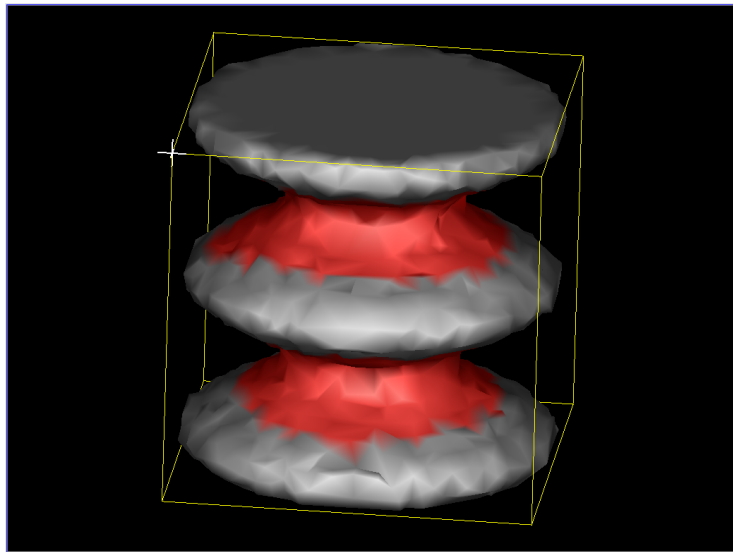


Abbildung 7.2: Segmentation eines Rotationskörpers

Die kuppenartige Fläche der Abb.7.3 wurde mittels folgender Gleichung generiert:

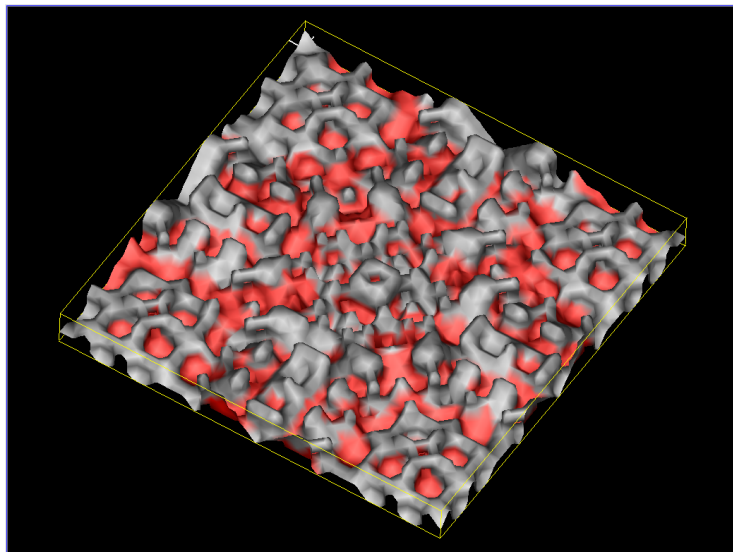


Abbildung 7.3: Segmentation eines Systems von Kuppen mit $p = 10$ Unterteilungsschritten

$$z(x,y) = 14 \sin \frac{(x-16)^2 + (y-16)^2}{10} \quad (7.3)$$

Außer bei der letzten, etwas komplexeren Oberfläche, stimmen die berechneten Unterteilungen stets gut mit unseren intuitiven Vorstellungen von Fundus- und Kronenregionen überein. Klar wird hierbei, dass die Anzahl der Unterteilungsschritte p

für die Feinstruktur der Kuppen in Abb.7.3 zu gering gewählt wurde. Probleme traten hierbei mit der mehrere Stunden langen Rechenzeit auf.

7.2 Beispielsegmentationen von Hirnoberflächen

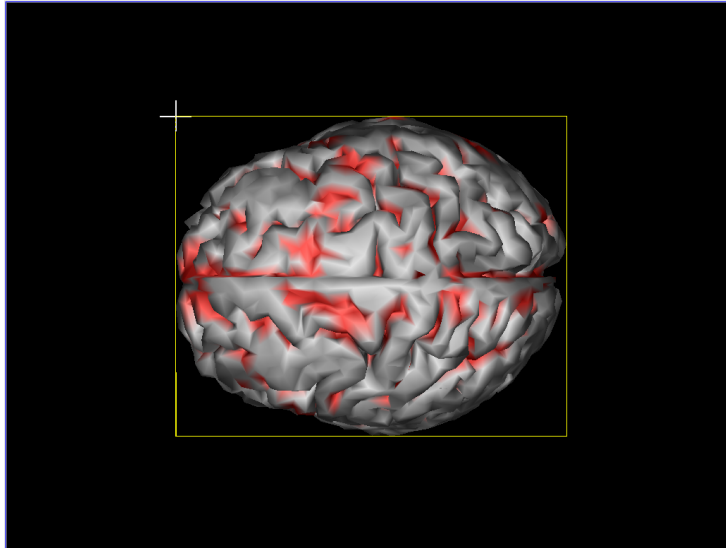


Abbildung 7.4: Segmentation der Hirnoberfläche aus 10k Dreiecken mit $p = 15$ Unterteilungsschritten

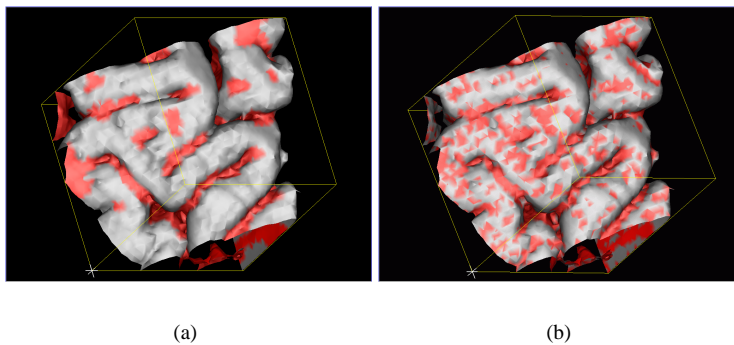


Abbildung 7.5: Segmentation eines Hirnausschnitts aus 20k Dreiecken: (a) unser Algorithmus mit $p = 10$ Unterteilungsschritten, (b) einfache Schwellwert-Trennung bei $H = 0$ als Vergleich

Es ist zu erkennen, dass Segmentationen realer, nichtkünstlicher Daten nur unbefriedigend gelingen. Zwar werden die meisten Talabschnitte extrahiert, doch treten auch Lücken und unerwünschte Überbrückungen von Sätteln auf. Möglicherweise sind die Anzahlen der Unterteilungen jeweils noch zu gering gewählt. Eine Nachbearbei-

tung zum Schließen der Lücken und zur Elimination der Sättel stellt einen möglichen Ausweg dar. Andererseits ist die deutliche Überlegenheit des Verfahrens gegenüber einfacher Schwellwert-Trennung gut sichtbar.

Die Rechenzeiten lagen jedoch schon so im Bereich ganzer Nächte, so dass eine weiter gehende Untersuchung zum einen recht mühsam ist und andererseits auch wenig sinnvoll im Hinblick auf den praktischen Nutzen erscheint, da bei solch langen Rechenzeiten eine nur halbautomatische Segmentation in jedem Fall schneller und auch zuverlässiger gelingen sollte. Evtl. kann das Verfahren in bestimmten Situationen unterstützend eingesetzt werden.

7.3 Einschätzung

Das anfangs gestellte sehr ehrgeizige Ziel einer krümmungsbasierten Diagnose zum Stadium von Hirnerkrankungen konnte im Rahmen dieser Arbeit *nicht* erreicht werden. Allerdings wurden wichtige Aspekte der Krümmungsschätzung auf triangulierten Oberflächen aufgezeigt, sowie ein darauf basierendes Segmentationsverfahren für die Hirnoberfläche vorgestellt und getestet.

Die beiden angesprochenen Probleme, mangelnde Robustheit und zu lange Rechenzeiten, sind bei Segmentations-Ansätzen weit verbreitet [Zui1995]. Durch Optimierungen scheint eine Verkürzung der Rechenzeiten möglich. Der aufwendigste Schritt, die Berechnung der Kamm- und Kronenlinien, kann evtl. durch einen anderen Ansatz (z.B. einen den Triangulierungsschritt übergehenden, direkt am Rasterbild arbeitenden [TG1992]) ersetzt werden.

Tabellenverzeichnis

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Legende zu Abb.1.2 | 9 |
| 1.3 | Triangulierungsalgorithmen im Vergleich | 16 |
| 4.1 | Güte von K-Schätzern bei verschiedenen Triangulierungen der Einheitskugel | 40 |
| 4.2 | Güte von H-Schätzern bei verschiedenen Triangulierungen der Einheitskugel | 40 |
| 4.3 | Güte von Krümmungsschätzern an einer Einheitszylinder-Oberfläche . | 41 |

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Prozesskette zur Parameterextraktion | 8 |
| 1.2 | Grobstruktur des Gehirns einschließlich seiner Umgebung | 9 |
| 1.3 | Kernspintomographie des Hirns: eine Schicht als 2D-Bild; Knochen und Liquor wurden bereits bildverarbeitungstechnisch entfernt | 10 |
| 1.4 | Änderung von Volumen V und Krümmung K sowie ihres Quotienten beim “Verplumpen” einer Windungsfurche | 16 |
| 3.1 | Diskretisierung und lokale Mittelung im 1D-Fall | 24 |
| 3.2 | Zerlegung eines Polygons | 25 |
| 3.3 | Parkettierung einer Polyederoberfläche in Umgebung einer Ecke (o.B.d.A. ebener Fall) | 27 |
| 3.4 | Zur Fläche des Sektors einer baryzentrischen Zelle | 28 |
| 3.5 | stumpfwinkliges Dreieck T_{ij} mit zugehörigem Teilstück einer Voronoi-Zelle: Flächen der Teilstücke verhalten sich wie 1:2:1 | 28 |
| 3.6 | spitzwinkliges Dreieck T_{ij} mit zugehörigem Teilstück einer Voronoi-Zelle | 29 |
| 3.7 | mittlere Krümmung an einer Kante | 33 |
| 3.8 | mittlere Krümmung an einer Ecke nach [MDSB2001] | 33 |
| 3.9 | mittlere Krümmung an einer Ecke nach [BaS2001] | 34 |
| 4.1 | Schrägbild und Netz eines triangulierten Würfels mit zwei Möglichkeiten der Parkettierung | 38 |
| 4.2 | Fehler bei der Triangulierung einer glatten Oberfläche über Stützstellen | 39 |
| 4.3 | Ausschnitt der Vergitterung eines Zylindermantels | 41 |
| 4.4 | Voronoi-Zelle in der abgerollten Triangulierung einer Zylinderoberfläche | 42 |
| 7.1 | Segmentation eines einzelnen Berges | 49 |
| 7.2 | Segmentation eines Rotationskörpers | 50 |
| 7.3 | Segmentation eines Systems von Kuppen mit $p = 10$ Unterteilungsschritten | 50 |
| 7.4 | Segmentation der Hirnoberfläche aus 10k Dreiecken mit $p = 15$ Unterteilungsschritten | 51 |
| 7.5 | Segmentation eines Hirnausschnitts aus 20k Dreiecken: (a) unser Algorithmus mit $p = 10$ Unterteilungsschritten, (b) einfache Schwellwert-Trennung bei $H = 0$ als Vergleich | 51 |

Literaturverzeichnis

- [Abr1961] A.Abragam: “The Principles of Nuclear Magnetism”, Oxford University Press, New York 1982
- [BaS2001] A.Bartesaghi, G.Sapiro: “A System For the Generation of Curves on 3D Brain Images”, 2001
- [Bro1979] I.A.Bronstein, K.A.Semandjajew; G.Grosche, V.Ziegler[Hrsg.]: “Taschenbuch der Mathematik”, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1979
- [BrS1999] M.A.Brown, R.C.Semelka: “MRI: basic principles and applications”, Wiley-Liss, New York 1999
- [BVGPV1999] P.W. de Bruin, F.M.Voss, S.F.Frisken-Gibson, F.H.Post, A.M.Vossepoel: “Improving Mesh Quality of Extracted Surfaces using SurfaceNets”, Delft 2000
- [Car1992] M.P. do Carmo: “Differentialgeometrie von Kurven und Flächen”, Vieweg, Wiesbaden 1992; Originalausgabe “Differential Geometry of Curves and Surfaces”, Prentice Hall; Englewood Cliffs , New Jersey 1976
- [DR2000] U.Diewald, M.Rumpf: “Visualization of Principal Curvature Directions by Anisotropic Diffusion”, Bonn 1999
- [Gib1998] S.F.F.Gibson: “Constrained elastic surface nets; Generating smooth surfaces from binary segmented data”, 1998
- [HBF1997] B.L.Hart, E.C.Benzel, C.C.Ford: “ Fundamentals of Neuroimaging”, W.B.Saunders Company, Philadelphia 1997
- [KEMa1995] S.Gottwald[Hrsg.]: “Meyers kleine Enzyklopädie Mathematik”, Meyers Lexikonverlag; Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich 1995
- [GH1995] A.Guéziec, R.Hummel: “Exploiting triangulated surface extraction using tetrahedral decomposition”, 1995
- [GH1994] A.Guéziec, R.Hummel: “The Wrapper Algorithm: Surface Extraction and Simplification”, 1994
- [Kre1968] E.Kreyszig: “Differentialgeometrie”, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1968

- [KLM1998] P.Krsek, G.Lukács, R.R.Martin: “Algorithms for Computing Curvatures from Range Data”, 1998
- [Kru2002] F.Kruggel, mündlich bei Vortrag an der Universität Leipzig, 2002
- [Lee1997] John M.Lee: “Riemannian Manifolds: an introduction to curvature”, Springer-Verlag, New York 1997
- [LC1987] W.E.Lorensen, H.E.Cline: “Marching Cubes: A high resolution 3d surface reconstruction algorithm”, 1987
- [MDSB2001] M.Meyer, M.Desbrun, P.Schröder, A.H.Barr: “Discrete Differential-Geometry Operators for Triangulated 2-Manifolds”, 2001
- [MSS1994] C.Montani, R.Scateni, R.Scopigno: “Discretized Marching Cubes”, Pisa 1994
- [PS1998] K.Polthier, M.Schmies: “Straightest Geodesics on Polyhedral Surfaces”, 1998
- [PL1994] A.R.Pope, D.G.Lowe: “Vista: Software Environment for Computer Vision Research”, Vancouver 1994
- [Sch1975] G.Schmidt: “Kompendium der Physik”, Gustav Fischer Verlag, Jena 1975
- [Smi2000] A.D.Smith: “The Folding of the Human Brain: From Shape to Function”, PhD-Arbeit, London 1999
- [SW1992] E.M.Stokely, S.Y.Wu: “Surface Parametrization and Curvature Measurement of Arbitrary 3D Objects”, 1992
- [Str1984] H.Stroppe: “Physik für Studenten der Natur- und Technikwissenschaften”, Fachbuchverlag Leipzig, Leipzig 1984
- [TG1992] J.-P.Thirion, A.Gourdon: “The 3D Marching Lines Algorithm and its Application to Crest Line Extraction”, 1992
- [TPG1998] G.M.Treece, R.W.Prager, A.H.Gee: “Regularized marching tetrahedra improved iso-surface extraction”, Cambridge 1998
- [WTVW1992] S.Weis, R.Thaller, A.Villringer, E.Wenger: “Das Gehirn des Menschen”, Verlag für Psychologie, Göttingen 1992
- [Zui1995] K.J.Zuiderveid: “Visualization of Multimodality Medical Volume Data using Object-Oriented Methods”, Proefschrift Graad Van Doctor, Utrecht 1995

Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Ort

Datum

Unterschrift