Philipps Universität Marburg

Mereologie und Topologie als Basis für eine Theorie des räumlichen Schließens

Dr.-Ing. Dirk Müller

Vortrag im Rahmen der AG Softwaretechnik

03.05.2007

Übersicht

(1) Begriff und Historie
(2) Abgrenzung zur Mengenlehre, Beispiele
(3) Axiome und weitere Konzepte
(4) Erweiterungen, Komposition, Dekomposition
(5) Mereologie + Topologie = Mereotopologie
(6) Anwendungen und räumliches Schließen
(7) Referenzen

Begriff und Historie 1/2

- von *grch.* „μερος“ , „Teil“, konstituierendes Prädikat (in PL1) ist Pxy: „x ist Teil von y“
- fundamentale mathematisch-philosophische Theorie mit Wurzeln bereits vor der Mengenlehre nach *Cantor* und *Peano*
- ohne Formalismen: *Aristoteles*, *Husserl*
- 1927 *Stanisław Leśniewski* führt Begriff ein, Schule der polnischen Mereologie mit bekanntestem Schüler *Alfred Tarski*

Begriff und Historie 2/2

- 1951 *Nelson Goodman* mit einer formalen Theorie der Teil-Ganzes-Beziehung
- 1970 *Rolf Eberle* klärt die Beziehung zur Mengenlehre; atomfreie Mereologie
- 1991 *D. K. Lewis*: Theorie, in der a zugleich Element und Untermenge von b sein kann
- 1999 *R. Casati* & *A. Varzi* verheiraten die M. mit der Topologie zur Mereotopologie
- findet trotz fundamentaler Bed. bisher kaum Beachtung i. d. akad. Lehre => Veränderg.

Beispiele 1/2

umgangssprachlich weiter Gebrauch:

- Der Henkel ist ein Teil der Tasse.
- Die Kappe ist ein Teil des Füllers.
- Die linke Hälfte ist dein Teil des Kuchens.
- Hessen ist ein Teil von Deutschland.
- Diese Ecke ist ein Teil des Wohnzimmers.
- Der elfte Akt war der beste Teil des Stücks.

(als unstrittige Beispiele)

Beispiele 2/2

auch i.w.S. gebraucht (materiell, konzeptuell):

- Der Marmor ist ein Teil der Statue.
- Gin ist ein Teil von Martini.
- Vorausschauend zu handeln ist Teil davon ein guter Autofahrer zu sein.
- 2 ist ein Teil von 3.
- Die ganzen Zahlen sind Teil der reellen Z.
- Humanität ist ein Teil des Menschseins.

Vergleich zur Mengenlehre

	Mereologie	Mengenlehre
Relation	Pxy	$x \in M$
Ebenenwechsel	nein	ja
x	konkret/abstr.	konkr./abstr.
y bzw. M	konkret/abstr.	abstrakt
Ontologie	neutral	Nominalismus
Wohlgeformtheit	ja	nein(*Russell*)

=> deutet in gewisser Weise Überlegenheit der Mereologie an (*Lewis* 1991)

Axiome 1/2

- Konsistenz zu geg. Bsp. legt die drei Halbordnungsbedingungen nahe, Theorie M
  (P.1) $\forall x: Pxx$ (Reflexivität)
  (P.2) $\forall xy:(Pxy \wedge Pyx) \rightarrow x=y$ (Antisymm.)
  (P.3) $\forall xyz:(Pxy \wedge Pyz) \rightarrow Pxz$ (Transitivität)
- (P.1) z.T. kein refl. Gebrauch („Leber ist Teil der Leber“?, jedoch später Def. von PP
- (P.2) „vi en el Aleph la tierra, y en la tierra otra vez el Aleph y en el Aleph la tierra“ (*Borges* 1949), jedoch fiktionaler Text

Axiome 2/2

- (P.3) ist am umstrittensten
  - Soldat ist Teil einer kleinen Einheit, aber **niemals** einer großen
  - Zellkern ist Teil einer Leberzelle, aber **nicht** der Leber
- Rettung der Transitivität von P durch Abgrenzung zu „direkter Teil“ bzw. „funkt. Teil“
- nicht-wohlgeformte Mereologie ist möglich (Kreise im Rel.-graphen) => mgl. Forschung

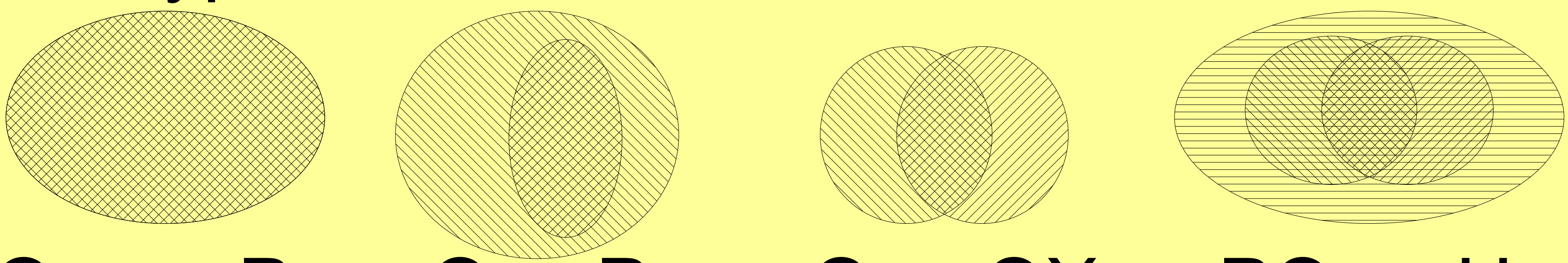
Erweiterungen 1/2

- **Vereinbarung: keine Allquantoren mehr**
- **M sei Theorie mit Halbordnungs-Bed.: Basismereologie**
- **weitere 2-stellige Prädikate per Definition:**

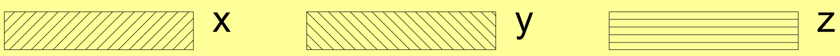
$Oxy := \exists z(Pzx \wedge Pzy)$	(Overlap)
$Uxy := \exists z(Pxz \wedge Pyz)$	(Underlap)
$PPxy := Pxy \wedge \neg Pyx$	(Proper Parthood)
$PExy := \neg Pxy \wedge Pyx$	(Proper Extension)
$OXxy := Oxy \wedge \neg Pxy$	(Over-crossing)
$UXxy := Uxy \wedge \neg Pyx$	(Under-crossing)
$POxy := OXxy \wedge OXyx$	(Proper Overlap)
$PUxy := UXxy \wedge UXyx$	(Proper Underlap)

Erweiterungen 2/2

vier typische Fälle als Schemata in 2D:



Oxy Pxy	Oxy Pxy	Oxy OXxy	POxy Uxy
Uxy **x=y**	Uxy **PPxy**	**POxy**	UXxy
	UXxy PEyx		**PUxy**
symm.	nicht symm.	symm.	symm.



Dekomposition 1/2

- durch Dekompositionsprinzipien:
  (P.4) $PPxy \rightarrow \exists z(Pzy \wedge \neg Ozx)$(Supplement)
  führt auf Minimale Mereologie (MM)
  (P.5) $\neg Pyx \rightarrow \exists z(Pzy \wedge \neg Ozx)$ (Starkes S.)
  führt auf Extensionale Mereologie (EM)
- (P.4) „Falls ein Objekt ein echtes Teil hat, soll es ein weiteres solches haben."
- (P.5) analog zum Ex.-Prinzip der Mengenlehre: „Ein Objekt ist vollständig durch Angabe seiner echten Teile def."

Dekomposition 2/2

- Atom: $Ax := \neg\exists y PPyx$ (Abschluss nach unten)
- Atomfreiheit: $\neg Ax$ (als die beiden
- Atomismus: $\exists y(Ay \wedge Pyx)$ Extreme)
- Bildung neuer Theorien mit Präfix A bzw. $\underline{A}$
- z.B. AEM führt dazu, dass Extensionalität auf die Atome zurückgeführt wird: $x=y \leftrightarrow \forall z(Az \rightarrow (Pzx \leftrightarrow Pzy))$
- auch: Zwischenformen (schwacher Atomismus / schwache Atomfreiheit)

Komposition 1/2

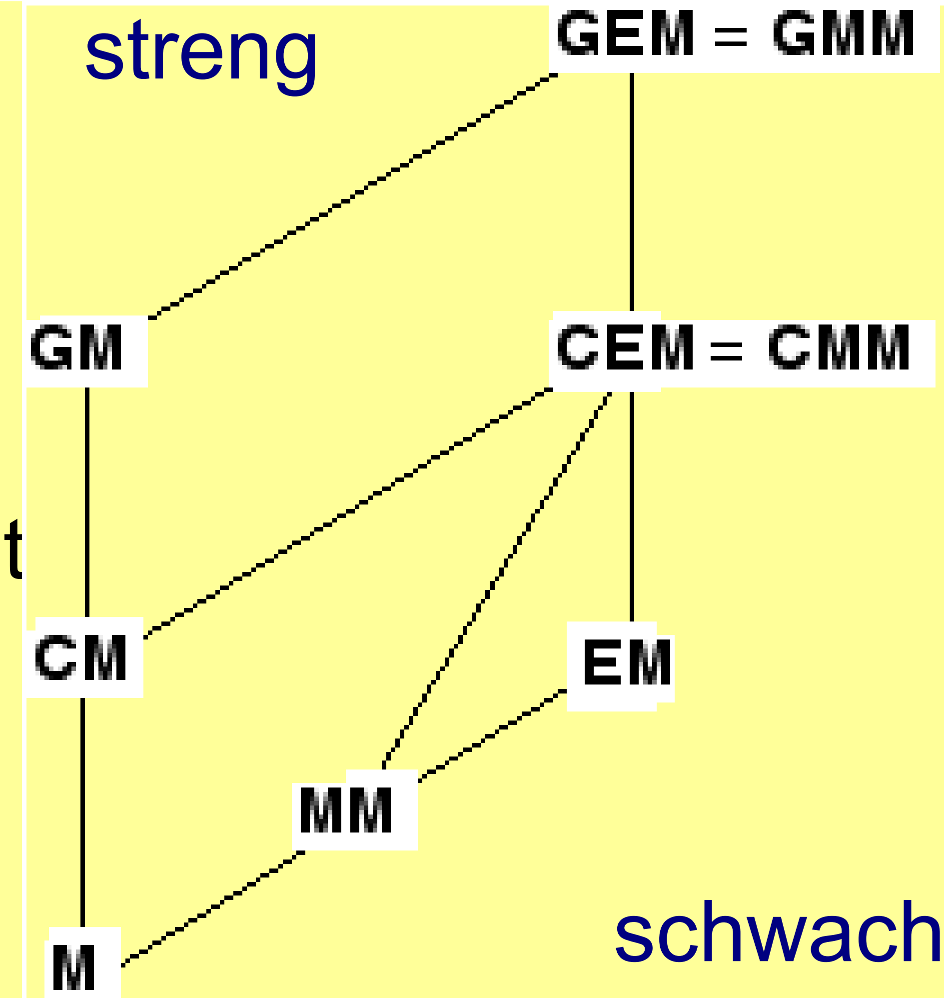
- Abschluss gegenüber Operationen („Hülle“): zuerst nur Ex., erst im extens. Fall neue Op.
- (P.6) $Uxy \rightarrow \exists z \forall w(Owz \leftrightarrow (Owx \vee Owy))$
- (P.7) $Oxy \rightarrow \exists z \forall w(Pwz \leftrightarrow (Pwx \wedge Pwy))$
- kleinster gem. Underlap, größtes gem. Teil
- Präfix C liefert neue Theorien C(M)M, CEM
- viel klarer als Summe und Produkt in CEM:
  (P.6') $Uxy \rightarrow \exists z(z = x + y)$
  (P.7') $Oxy \rightarrow \exists z(z = x \times y)$

Komposition 2/2

- Theorem: CEM=CMM, (P.4) $\wedge$ (P.7) $\rightarrow$ (P.5)
- Ex. eines Eins- und Nullelements bzgl. P: $\exists z \forall x Pxz$, Universum (U oder W) in EM $\exists z \forall x Pzx$, N, manche postulieren Existenz !
- (P.8) $\exists w \phi w \rightarrow \exists z \forall w (Owz \leftrightarrow \exists v (\phi v \wedge Owv))$ Axiomensystem, unbeschränkte Summe
- liefert Allg. M. (GM), Allg. Extens. M. (GEM)
- GM=GCM, GEM=GMM wegen (P.8) $\rightarrow$ (P.7) $\wedge$ (P.6)

Zusammenfassung der Theorie

- logischer Raum aller bisher vorgestellten Theorien in einem Schema
- *Hasse*-Diagramm des Verbandes mit der Relation „basiert auf“ zwischen Theorien (aus *Varzi* 2003)

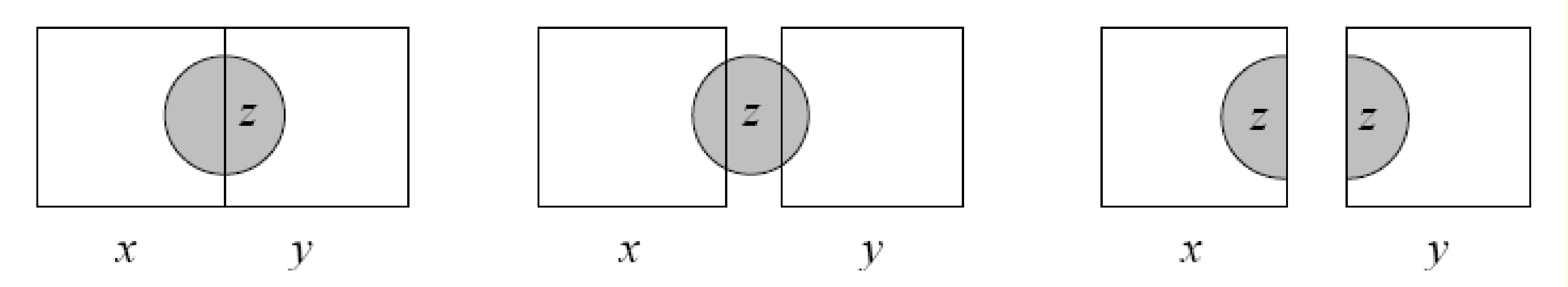


Isomorphien und Beispiele

- (A)GEM ist isomorph zur auf nicht-leere Teilmengen beschränkten Teilmengenrelation einer geg. Menge, d.h. einer *Boole-schen Algebra ohne Nullelement* **(*Tarski* 1935)**
- auch I. zwischen *Leśniewskis* M., die nicht auf klass. Logik beruht, und BA (*Clay* 1974)
- *Lewis*' T. => *Peano* und *Zermelo-Fraenkel* als Theoreme, nicht mehr als Axiome (1991)
- <u>A</u>GEM $\cong$ reg. offene Mengen im eukl. Raum
- $\forall x Ax$ Nihilismus mit $Pxy \leftrightarrow x = y$

Mereotopologie

- Versuche durch *Whitehead* 1920, Prädikat „verbunden“ zu def. (Einbettung T. in M.)
  $\psi xy := \exists z(Ozx \wedge Ozy \wedge \forall w(Pwz \rightarrow Owx \vee Owy))$
- scheiterte (siehe Abb. aus *Varzi* 2006), nur notwendig, nicht hinreichend =>Erw. zur MT

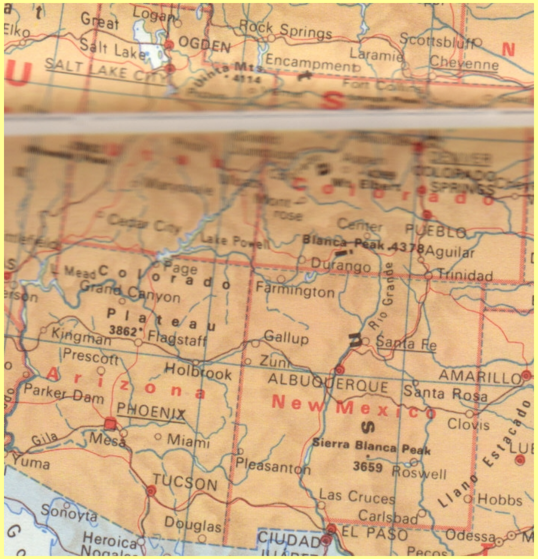


ψxy verbunden

ψxy wg. $\exists z$ (rechts) nicht verbunden

Beispiele

- Prädikat „ist verbunden mit“, Bez. Cxy
  - –Der Henkel ist mit der Tasse verbunden.
  - –Der Tisch berührt die Wand / ist mit der Wand verbunden. (metrisch, sehr kl. Abst.)
- Dimensionalitätsunterschiede
  - –C(Colorado, Arizona) (0)
  - –C(Frankreich, D'land) (1)
  - –C(Berlin, Brandenburg) (1)



Axiome

- unstrittig sind Reflexivität und Symmetrie:
  (C.1) Cxx (C.2) Cxy → Cyx
- Einschluss: Exy := ∀z(Czx → Czy)
- Versuch einer Integration von Pxy und Cxy
  (C.3) Pxy → Exy erweist sich als günstig
  MT, Minimale Mereotopologie
- (C.4) Exy → Pxy liefert dann RMT
  (Reduktionistische Mereotopologie), E ≡ P
- altern.: nur ein tern. P. CPxyz, x und y sind
  verb. Teile von z, Pxy:=CPxxy, Cxy:=CPxyy

GEMT

- Selbstverbundenheit (keine unverb. Teile): $SCx := \forall yz(\forall w(Owx \leftrightarrow (Owy \vee Owz)) \rightarrow Cyz)$
- analog zu *Whitehead* 1920: $(C.7_{SC})\ \exists z(SCz \wedge Ozx \wedge Ozy \wedge \forall w(Pwz \rightarrow Owx \vee Owy)) \rightarrow Cxy$ (bedingter Right Join)
- $(C.8)\ z = \Sigma x\phi x \rightarrow \forall y(Cyz \rightarrow \exists x(\phi x \wedge Cyx))$ (Fusion Connection)
- MT + GEM + (C.4) + $(C.7_{SC})$ + (C.8) = GEMT Allgemeine Extensionale Mereotopologie

Erweiterungen der GEMT

- **Nachahmung der Std.-Op. der Punktmengentopologie**

$ix := \Sigma z \forall y(Czy \rightarrow Oxy)$	(Inneres)
$ex := i(\sim x)$	(Äußeres)
$cx := \sim(ex)$	(Hülle)
$bx := \sim(ix + ex)$	(Rand)

- Axiome der topologischen Hülle, *Kuratowski*

(C.9)	$Px(cx)$	(Inklusion)
(C.10)	$c(cx) = cx$	(Idempotenz)
(C.11)	$c(x + y) = cx + cy$	(Additivität)

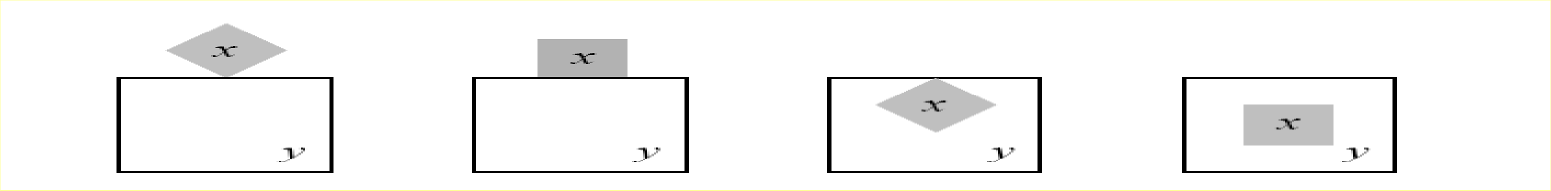
- GEMT + (C.10) = KGEMT, randbasierte ST

Diskussion 1/2

- Unterscheidung offene/geschlossene Obj.?
- „randfreie" Ansätze (*Whitehead* 1929)

  (C.5) $\exists x(IPPxy)$ (Randfreiheit)

  punktfreie Geometrie, mikroskopische Plausibilität, Skalenproblem, schwächere Varianten (vgl. Atomarität)
- Untertypen von C (Dim.), aus *Varzi* 2006



Diskussion 2/2

- Probleme bei Prozessen:
  - Durchschneiden eines Objekts (neue Oberfläche entsteht etc.)
  - Bohren eines Lochs in eine Kugel => Verwandlung in einen Torus
- Genus eines Objekts („Anz. der Löcher") ist in KGEMT definierbar, siehe *Varzi* 2006

Anwendungen und räumliches Schließen

- Lokalisationstheorie: Rel. L zwischen Obj. und Raum
- P und C unabh. voneinander, außer falls (C.4) akzept.
- in KGEMT können nur offene mit geschlossenen Obj. extern verbunden sein, sonst nur mit Überlappung
- $Lxy \rightarrow Lyy$ (bed. Reflexivität), Auszeichnung von Regionen; können nur auf sich selbst lokalisiert sein
- $Lxy \rightarrow Cxy$ ist plausibel, aber nicht in KGEMT
- in Worten: „Lokalisation ist Verbundenheit einer bestimmten Art“
- GUIs, KI als Anwendungen in der Informatik

Referenzen 1/2

- A. Varzi: „Mereology“ in Stanford Encyclopedia of Philosphy, 2003 http://plato.stanford.edu/entries/mereology, Download am 24.04.2007
- Wikipedia: „Mereology“, 2007, http://en.wikipedia.org/wiki/Mereology, Download am 24.04.2007
- J. L. Borges: „El Aleph“, Auszug span. mit engl. Übersetzung, 1949, http://www1.uol.com.br/bienal/24bienal/rot/frag_borg.htm, Download am 25.04.2007
- S. Leśniewski: „Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik“, in Fundamenta Mathematicae XIV, 1-81, 1929, http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/fm/fm14/fm1411.pdf, Download am 25.04.2007
- N. Goodman: „The Structure of Appearance“, 1951, Cambridge (MA): Harvard University Press (3rd ed. Dordrecht: Reidel, 1977)
- R. A. Eberle: „Nominalistic Systems“, 1970, Kluwer

Referenzen 2/2

- R. Casati und A. C. Varzi: „Parts and Places: The Structures of Spatial Representation", 1999, Cambridge (MA): MIT Press
- A. C. Varzi: „Spatial Reasoning and Ontology: Parts, Wholes, and Locations", 2006, http://www.columbia.edu/~av72/papers/Space_2006.pdf, Download am 25.04.2007
- D. K. Lewis: „Parts of Classes", 1991, Oxford: Blackwell
- A. Tarski: „Zur Grundlegung der Booleschen Algebra. I", 1935, Fundamenta Mathematicae 24: 177-198
- R. E. Clay: „Relation of Leśniewski's Mereology to Boolean Algebras", 1977, Journal of Symbolic Logic 39: 638-648
- A. N. Whitehead: „The Concept of Nature", 1920, Cambridge: Cambridge University Press
- A. N. Whitehead: „Process and Reality", 1929, New York: Macmillan