Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2001/02

Übungen zur Mathematik III

– Blatt 1 –

Abgabe Donnerstag, 25.10.2001, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte). Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale. – Dazu gehört die Begründung der Konvergenz.

$$\text{a)}\int_0^1 \ln x dx \qquad \text{b)}\int_0^\infty x^5 e^{-2x} dx \qquad \text{c)}\int_{-\infty}^\infty x \cdot e^{-x^2} dx$$

Aufgabe 2 (2 Punkte). Die Keplersche Fassregel wird zur Approximation von Integralen benutzt. Zu einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei

$$K(f) := K_b^a(f) := \frac{b-a}{6}\Big(f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\Big).$$

Zeigen Sie, dass die Kepler-Fassregel für Polynome vom Grad ≤ 3 exakt ist. Das heißt, ist $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ mit Koeffizienten $a_j \in \mathbb{R}$, so gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$

$$K(p) = \int_a^b p(x) dx.$$

Zusatzaufgabe (3 Zusatzpunkte). Für beliebige Funktionen wird eine gute Kepler-Fass-Näherung aber erst bei kleinen Intervallen erreicht, so dass man den Ausdruck auf jeden der n Abschnitte einer äquidistanten Unterteilung $x_k := a + k \cdot h_n$, $k = 0, \ldots, n$, mit $h_n := (b-a)/n$ anwendet. Sei also

$$K_n(f) := \sum_{k=1}^n K_{x_{k-1}}^{x_k}(f).$$

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ viermal stetig differenzierbar ($f \in C^4([a,b])$), so existiert eine Konstante $c > 0$ mit

$$\left| \int -a^b f(x) dx - K_n(f) \right| \leq c \frac{(b-a)^5}{n^4}$$

für alle $n \in \mathbb{N}^*$.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Es soll das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ approximiert werden.

a) Zeigen Sie (unter Benutzung von $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ falls $x \geq 1$) die Abschätzung

$$\left| \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx - \int_{-8}^8 e^{-x^2} dx \right| < 10^{-3}.$$

b) Wie groß ist n zu wählen, um mit der Keppler-Fassregel das eigentliche Integral $\int\limits_{-8}^{8} -x^2 dx$ auf drei Dezimale zu berechnen?

Aufgabe 4 (2 Punkte). Berechnen Sie das Volumen $V(K_f)$ des Rotationskörpers K_f zur Funktion f, die gegeben ist durch

a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ auf $[-1, 1]$,

b) $f(x) = 1 + x^2$ auf $[-2, 2]$.

Scheinkriterien sind dieselben wie in der vorangegangenen Vorlesung Mathematik II. Alle Informationen zur Vorlesungen und den Übungen sind im Netz zu finden in der Vorlesungsliste des Fachbereichs oder unter www.mathematik.uni-marburg.de/∼eckert oder ∼gromes.

Klausurtermin ist Donnerstag, 7.2.2002, 11–14 Uhr in HG 5. Eine Nachschreibklausur findet statt am Dienstag, 2.4.2002, 10–13 Uhr in Chemie-Hörsall A auf den Lahnbergen.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2001/02

Übungen zur Mathematik III

– Blatt 2 –

Abgabe Donnerstag, 1.11.2001, vor der Vorlesung

Aufgabe 4 (3 Punkte).

a) Geben Sie eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ an mit

$$\|f\|_\infty \geq 10^3 \quad \text{und} \quad \|f\|_1 \leq 10^{-3}.$$

b) Zeigen Sie: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt

$$\|f\|_1 \leq (b-a)\,\|f\|_\infty.$$

Aufgabe 5 (mündlich). Es sei G die Menge der geraden Funktionen auf $\mathbb{R}$,

$$G = \big\{ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\big|\; g(x) = g(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \big\},$$

und U die Menge der ungeraden Funktion auf $\mathbb{R}$,

$$U = \big\{ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\big|\; h(x) = -h(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \big\}.$$

Zeigen Sie:

a) Jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lässt sich als Summe aus einer geraden und einer ungeraden Funktion schreiben, $f = g + h$ mit $g \in G$, $h \in U$.

b) $G \cap U$ enthält nur die Nullfunktion.

Aufgabe 6 (4 Punkte). Überprüfen Sie die folgenden trigonometrischen Formeln mit Hilfe der Euler-Formeln

$$e^{ix} = \cos x + i\ \sin x, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad x \in \mathbb{R}$$

und der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion:

a) $\cos(x+b) = \cos x \cdot \cos b - \sin x \cdot \sin b$,

b) $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$,

c) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

b/w

Aufgabe 7 (4 Punkte). Sei V_n der $\mathbb{C}$-Vektorraum

$$V_n = \left\{ \sum_{k=-n}^{n} c_k\, e_k \;\middle|\; c_k \in \mathbb{C} \right\} \qquad \text{mit} \qquad e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\;\; x \mapsto e^{2\pi i k x}.$$

Für $f = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, e_k \in V_n$ und $g = \sum_{k=-n}^{n} d_k\, e_k \in V_n$ sei

$$(*) \qquad \langle f | g \rangle := \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot \overline{d}_k.$$

Zeigen Sie:

a) Durch $(*)$ ist ein Skalarprodukt definiert.

b) Dieses Skalarprodukt stimmt mit dem Skalarprodukt auf V_n

$$(f,g) \mapsto \int_0^1 f(x)\, \overline{g(x)}\, dx$$

auf V_n überein.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2001/02

Übungen zur Mathematik III
– Blatt 3 –
Abgabe Donnerstag, 8.11.2001, vor der Vorlesung

Aufgabe 8 (mündlich). Zur Abkürzung sei

$$\cos_k(x) := \cos 2\pi kx, \quad \sin_k(x) := \sin 2\pi kx.$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Exponentialdarstellung von $\cos_k$ und $\sin_k$ eine der folgenden Orthogonalitätsrelationen:

$$\begin{array}{lll}
\langle \cos_k \,|\, \cos_j \rangle_{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}\,\delta_{k,j}, & k \geq 0,\ j \geq 0,\ k+j \neq 0, & \langle \cos_0 \,|\, \cos_0 \rangle_{\mathcal{P}} = 1, \\
\langle \sin_k \,|\, \sin_j \rangle_{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}\,\delta_{k,j}, & k > 0,\ j > 0, & \\
\langle \cos_k \,|\, \sin_j \rangle_{\mathcal{P}} = 0, & k \geq 0,\ j > 0. &
\end{array}$$

Begründen Sie damit, dass für ein trigonometrisches Polynom

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos_k + b_k \sin_k)$$

die Koeffizienten die Fourierkoeffizienten sind, das heißt

$$a_k = 2\,\langle f \,|\, \cos_k \rangle \quad \text{für} \quad k = 0, 1, \ldots, n, \qquad b_k = 2\,\langle f \,|\, \sin_k \rangle \quad \text{für} \quad k = 1, \ldots, n.$$

Aufgabe 9 (6 Punkte). Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten a_k und b_k der Funktionen:

a) $x \mapsto \cos^2 \pi x \;\; x \in \mathbb{R}$. Weshalb ist diese Funktion 1-periodisch?

b) $x \mapsto \sin 2\pi(x + \alpha),\;\; x \in \mathbb{R}$ für ein festes $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) Die 1-periodische Fortsetzung der Funktion

$$x \;\mapsto\; \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{2}[\\ -1, & x \in [\frac{1}{2}, 1[\;. \end{cases}$$

d) Die 1-periodische Fortsetzung der Funktion

$$x \mapsto x^2, \quad x \in \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right].$$

Für welche dieser Funktionen f konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig gegen f ?

Aufgabe 10 (3 Punkte). Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1-periodisch und j-mal stetig differenzierbar. Begründen Sie die folgende Abschätzung für die Fourier-Koeffizienten c_k von f:

$$|c_k| \leq \frac{\|f^{(j)}\|_\infty}{|2\pi k|^j} \qquad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Betrachten Sie dazu zunächst den Fall $j = 1$.

b/w

Aufgabe 11 (3 Punkte). Ein quadratischer Spline ist analog zum kubischen Spline definiert: In den Teilintervallen ist

$$f = p_k \in \mathrm{Pol}_2\,,$$

in den Knoten stimmen jeweils Funktionswert und erste Ableitung überein (d.h. $f \in C^1$). Berechnen Sie den quadratischen Standard-B-Spline B^* mit folgenden Eigenschaften:

a) B^* hat die Knoten $-3/2,\ -1/2,\ 1/2,\ 3/2$.

b) $B^*(x) = B^*(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) $B^*(x) = 0$ für $|x| \geq 3/2$.

d) $B^*(-1/2) + B^*(1/2) = 1$.

Ist B^* dadurch eindeutig bestimmt ?

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2001/02

Übungen zur Mathematik III

– Blatt 4 –

Abgabe Donnerstag, 15.11.2001, vor der Vorlesung

Aufgabe 11 (4 Punkte). Es sei B^0 der kubische Standard-Spline aus Absatz 6.2 und für $j \in \mathbb{Z}$ sei

$$\lambda_j = \sqrt{3}\,(-2+\sqrt{3})^{|j|} \quad \text{und} \quad x_j = a + jh, \quad h > 0.$$

Zeigen Sie:

a) $\lambda_{j-1} B^0(-1) + \lambda_j\, B^0(0) + \lambda_{j+1}\, B^0(1) = \delta_{j,0}$ für $j \in \mathbb{Z}$.

b) $F^0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F^0(x) = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} \lambda_j\, B^0(x-j)$ ist definiert und

$$F^0(k) = \delta_{k,0} \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

c) Geben Sie mit Hilfe von b) einen kubischen Spline s an, der eine gegebene Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in den Knoten x_j interpoliert, d.h.

$$s(x_j) = f(x_j) \quad \text{für alle} \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 12 (mündlich). Zeigen Sie, dass die French-Railroad-Metrik aus Absatz 7.1 die Axiome einer Metrik erfüllt.

Aufgabe 13 (3+1 Punkte). Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) In $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Norm.

i) $a_n = ((-1)^n, r^n)$ für ein $r > 0$ ii) $a_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} 3^{-k},\ \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right)$

b) Auf $C([0,1])$ die Folge (f_n), $f_n(x) = x^n$, bzgl. der

i) 1-Norm, $\|f\|_1 = \int\limits_0^1 |f(x)|dx$

(*) ii) Supremums-Norm $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

Aufgabe 14 (3 Punkte). Sei $x_o \neq x_1$ aus $\mathbb{R}$. Zeigen Sie: Für alle Zahlen y_0, y_1, y_0', y_1' aus $\mathbb{R}$ gibt es genau ein Polynom $p \in Pol_3$ mit $p(x_j) = y_j$ und $p'(x_j) = y_j'$ für $j = 0, 1$.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2001/02

Übungen zur Mathematik III

– Blatt 5 –

Abgabe Donnerstag, 22.11.2001, vor der Vorlesung

Aufgabe 15 (5 Punkte). Berechnen Sie für die logarithmische Spirale

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \ \ t \mapsto \begin{pmatrix} r^t \ \cos 2\pi t \\ r^t \ \sin 2\pi t \end{pmatrix} \quad (\text{mit } r > 1) \ :$$

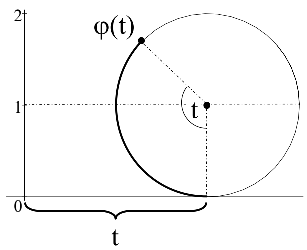
a) Die Ableitung $\varphi'(t)$ und die Punkte t, für die $\varphi_2'(t) = 0$ gilt.
Auf welcher einfachen Kurve liegen alle diese Punkte $\varphi(t)$ mit $\varphi_2'(t) = 0$?

b) Die Bogenlänge $L(\varphi|_{[a,b]})$ von φ auf dem Intervall $[a, b]$.
Existiert $\lim\limits_{a \to -\infty} L(\varphi|_{[a,b]})$?

Aufgabe 16 (5 Punkte). Ein Punkt auf dem Rand eines Kreises mit Radius 1, der auf der x-Achse abrollt, beschreibt eine Zykloide.

a) Begründen Sie an Hand der Skizze die Kurvengleichung der Zykloide

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}.$$



b) Skizzieren Sie $\varphi([0, 4\pi])$, insbesondere das Verhalten bei $0, 2\pi$ und 4π.
(Aus den Potenzreihen für sin und cos folgt, dass $\varphi(t)$ bei Null in erster Näherung durch $\begin{pmatrix} t^3/3! \\ t^2/2! \end{pmatrix}$ gegeben ist.)

c) Berechnen Sie die Bogenlänge von φ auf $[0, 2\pi]$.

Aufgabe 17 (mündlich). Für $a > 0, \ \ b > 0$ ist

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

eine Ellipse mit Halbachsen a und b.

a) Geben Sie eine Kurve $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ an mit $\varphi(I) = E$.

b) Zeigen Sie: Es gibt eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die den Einheitskreis $\mathbb{S} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ x^2 + y^2 = 1 \right\}$ auf E abbildet.

Fachbereich Mathematik und Informatik — Wintersemester 2001/02
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Übungen zur Mathematik III
– Blatt 6 –
Abgabe Donnerstag, 29.11.2001, vor der Vorlesung

Aufgabe 18 (3 Punkte). Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Kurve

$$\varphi_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi_n(t) = \begin{pmatrix} \cos nt \, \cos t \\ \cos nt \, \sin t \end{pmatrix}$$

gegeben. Ist φ_n eine glatte Kurve?
Skizzieren Sie den Verlauf für $n = 0, 1, 2, 3$.

Aufgabe 19 (mündlich). Geben sie eine Kurve $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ an, so dass $\varphi(I)$ eine "Acht" ergibt, z.B. in Form zweier sich berührender Kreise.
Lässt sich φ als glatte Kurve wählen?

Aufgabe 20 (2 Punkte). Geben Sie eine Parametertransformation $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, so dass für die logarithmische Spirale

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} r^t \, \cos 2\pi \, t \\ r^t \, \sin 2\pi \, t \end{pmatrix} \qquad (\text{mit } r > 0)$$

$\varphi \circ p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Aufgabe 21 (3 Punkte). Es seien A eine reelle (m, m)-Matrix, $b \in \mathbb{R}^m$ und

$$S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto Ax + b.$$

Ferner seien Punkte $Q_{-1}, Q_0, \ldots, Q_n, Q_{n+1}$ aus dem $\mathbb{R}^m$ gegeben,

$$\varphi(t) = \sum_{j=-1}^{n+1} B^0(t - j) \, Q_j$$

die Spline-Kurve aus Satz 8.4 zu den Punkten $Q_{-1}, \ldots, Q_{n+1}$ und φ_S die Spline-Kurve zu $S\,Q_{-1}, \ldots, S\,Q_{n+1}$. Zeigen Sie:

a) Für alle $t \in [0, n]$ ist
$$S(\varphi(t)) = \varphi_S(t).$$
(Hinweis: $\sum_{j=-1}^{n+1} B^0(t - j) = 1$ für $t \in [0, n]$).

b) Hat φ feste Anfangs- und Endpunkte, so gilt dies auch für φ_S.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2001/02

Übungen zur Mathematik III

– Blatt 7 –

Abgabe Donnerstag, 6.12.2001, vor der Vorlesung

Aufgabe 22 (3 Punkte).

a) Geben Sie eine Kurve $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ an, deren Bild die Verbindungsstrecke zweier Punkte P und Q des $\mathbb{R}^m$ ist.

b) Sei g eine Gerade in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2 \setminus g$ genau zwei Komponenten hat.

Aufgabe 23 (3 Punkte). Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ die Spline-Kurve aus Satz 8.5 zu den Punkten $Q_0, \ldots, Q_n$ mit festem Anfangspunkt Q_0 und Endpunkt Q_n.

a) Zeigen Sie
$$\varphi'(0) = Q_1 - Q_0, \quad \varphi'(n) = Q_n - Q_{n-1}.$$

b) Sei ψ die Spline-Kurve zu den Punkten $P_0, \ldots, P_k$ mit festem Anfangs- und Endpunkt P_0 und P_k und es sei $P_k = Q_0$. Zeigen Sie die Äquivalenz von (1) und (2):

(1) $\psi'(k) = \lambda\, \varphi'(0)$ für ein $\lambda > 0$

(2) Q_0 liegt auf einer Geraden g zwischen P_{k-1} und Q_1.

Aufgabe 24 (3 Punkte). Sei $M \subset \mathbb{R}^m$ und K_x die Komponente von $\mathbb{R}^m \setminus M$ bzgl. eines Punktes $x \in \mathbb{R}^m \setminus M$. Zeigen Sie, dass eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^m \setminus M$ durch
$$x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; y \in K_x$$
definiert ist. Was bedeutet es, dass K_x die Klasse von x ist?

Aufgabe 25 (mündlich). Geben Sie ein Beispiel einer beschränkten Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ an, so dass $\mathbb{R}^2 \setminus M$ unendlich viele Komponenten hat.
Lässt sich M als Bild einer Kurve wählen?

Aufgabe 26 (3 Punkte). Gegeben seien die Funktionen
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x^2 + y^2$$
und
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Geben Sie Kurven $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$, längs derer f bzw. g konstant ist (die "Höhenlinien"), d.h. $f \circ \varphi$ bzw. $g \circ \varphi$ ist konstant.

b) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2001/02

Übungen zur Mathematik III

– Blatt 8 –

Abgabe Donnerstag, 17.12.2001, vor der Vorlesung

Aufgabe 27 (3 Punkte). Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Zeigen Sie: f ist in jedem Punkt partiell differenzierbar, aber unstetig im Nullpunkt.
Geben Sie die partiellen Ableitungen $\partial_1 f(x, y)$ und $\partial_2 f(x, y)$ an.

Aufgabe 28 (mündlich). Zeigen Sie: Ist $f : D \to \mathbb{R}$ im Punkt $a \in D$ in Richtung v differenzierbar, so auch in Richtung $-v$ und es gilt $\partial_{-v} f(a) = -\partial_v f(a)$.

In den folgenden beiden Aufgaben sei $\|x\| = \|x\|_2$ für $x \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 29 (4 Punkte). Gegeben sei die Normfunktion im $\mathbb{R}^n$,

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|.$$

Zeigen Sie:

a) Ist $x = 0$, so existiert für kein $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ die Richtungsableitung $\partial_v f(0)$.

b) Ist $x \neq 0$, so existiert für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ die Richtungsableitung $\partial_v f(x)$. Berechnen Sie diese und bestimmen Sie zu x das v, so dass $\partial_v f(x)$ maximal ist.

c) Skizzieren Sie im Falle $n = 2$ den Funktionsgraphen von f.

Aufgabe 30 (3 Punkte). Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ rotationssymmetrisch, d.h. es gibt ein $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(\|x\|)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie: Ist $r \mapsto g(r)$ differenzierbar für $r > 0$, so ist f für jeden Punkt $x \neq 0$ partiell differenzierbar und für $x \neq 0$ sind $\partial f(x)$ und x linear abhängig.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2001/02

Übungen zur Mathematik III

– Blatt 9 –

Abgabe Donnerstag, 20.12.2001, vor der Vorlesung

Aufgabe 31 (4 Punkte). Es soll die Sattelfläche untersucht werden. Sei dazu

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \; x^2 - y^2.$$

a) Bestimmen Sie zu beliebigen $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ eine Basis des Tangentialraums $T_{(a,b)}$ an f in (a,b) sowie einen Normalenvektor $n_{(a,b)}$.
Für welche Punkte (a,b) ist $\mathbb{R} \cdot n_{(a,b)}$ eine Raumdiagonale, d.h.

$$\mathbb{R}\, n_{(a,b)} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad \varepsilon_j \in \{1, -1\}.$$

b) Geben Sie zu $(a,b) \neq (0,0)$ eine C^1-Kurve $\varphi : \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ an mit

$$\varphi(0) = (a,b) \quad \text{und} \quad (f \circ \varphi)(z) = c \quad \text{für alle} \quad f \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie $\varphi'(0)$ und $\partial f(a,b)$ und überprüfen Sie, dass diese Vektoren orthogonal sind.

Aufgabe 32 (3 Punkte). Zeigen Sie zu

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \;\mapsto\; \begin{cases} \dfrac{y^5}{2x^4 + y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} :$$

a) f ist stetig im Nullpunkt und alle Richtungsableitungen $\partial_v f(0,0)$ existieren. Berechnen Sie diese.

b) Ist $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\; t \mapsto \binom{t}{t}$, so ist $f \circ \varphi$ differenzierbar, aber es gilt *nicht* die Formel der Kettenregel

$$(f \circ \varphi)'(0) = \partial f(\varphi(0)) \cdot \varphi'(0).$$

Aufgabe 33 (3 Punkte). Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x^2 y + 2x^2 - y + y^2 \, \cos x$.

a) Berechnen Sie die Ableitung $\partial f(a,b)$ und die Hesse-Matrix $\partial^2 f(a,b)$ und geben Sie das Taylorpolynom $P^2_{(a,b)}(f)$ an.

b) Setzen Sie speziell $(a,b) = (0,0)$ ein und lesen Sie ab, bis zu welcher Ordnung Terme reproduziert werden.

Aufgabe 34 (3 Punkte). Sei $g :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ aus C^2 und

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(\|x\|).$$

Berechnen Sie

$$\Delta f(x) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j \partial_j f(x)$$

und zeigen Sie damit: Ist $n = 2$, $g(r) = \ln r$, so ist $\Delta f = 0$.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2001/02

Übungen zur Mathematik III

– Blatt 10 –

Abgabe Donnerstag, 10.1.2002, vor der Vorlesung

Aufgabe 35 (Sonderpunkte). In schon etwas vorgerückter Feststimmung beschließen die drei Kinder einer Familie, das letzte Geschenk, eine zu allerhand Spekulationen Anlass gebende kegelförmige Wundertüte $K_w = \text{Graph}\,(f)$, wobei $f(x,y) = 2(1-\sqrt{x^2+y^2})$, $x^2+y^2 \leq 1$, durch Erdnusszielwurf zu verteilen. Die Erdnuss E_1 des ersten Werfers bleibt an der Teppichkante liegen, $E_1 = (5,3,0)$, die zweite landet auf dem Tisch zwischen Geschenkpapier und Keksen, $E_2 = (3,4,\frac{5}{2})$ und E_3 bleibt im überraschend dichten Geäst des Weihnachtsbaumes hängen, $E_3 = (1,1,\frac{13}{2})$. Der nachfolgende Streit, wer nun am nächsten an der Tüte ist, droht den Festfrieden zu stören. Wer hilft schlichten (indem er $d_j^2 = \min\{\|E_j - P\|^2 \mid P \in K_w\}$ berechnet)?

Das Knacken dieser Weihnachtsnuss wird mit 5 Zusatzpunkten belohnt.

Aufgabe 36 (4 Punkte). Die altbewährte Marzipankartoffel "Landgraf Philipp" mit dem Achsenverhältnis der Rotationsellipse im goldenen Schnitt

$$L_{ph} := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (1+\sqrt{5})^2(x^2+y^2) + 4z^2 \leq 1\right\}$$

(die Form ist angeblich vom Riechorgan des Herrschers abgeleitet) hat sich dieses Jahr eines neuen Produkts

$$L_{og} := \left\{(x,y,z) \;\middle|\; x^2+y^2 \leq (0,45-|z|)^2, \quad |z| \leq 0,45\right\}$$

zu erwehren, das nicht nur durch seine moderne Form und die blaue Verpackung besticht, sondern auch noch 3% billiger als L_{ph} angeboten wird.

Wie entscheidet sich der mündige Marzipankonsument? Helfen Sie diesem auch durch eine Skizze des Querschnitts der Konkurrenzprodukte in der (x,z)-Ebene.

Aufgabe 37 (3 Punkte). Es sei A eine reelle, symmetrische $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) A ist indefinit.

b) A hat zwei Eigenwerte λ_j und λ_k mit $\lambda_j > 0$ und $\lambda_k < 0$.

Geben Sie für $n = 2$ ein zu Satz 9.8 c) analoges Kriterium an.

Aufgabe 38 (3 Punkte). Berechnen Sie lokalen Extrema der Funktion

$$f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^3 + x - 4xy - 2y^2.$$

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2001/02

Übungen zur Mathematik III

– Blatt 11 –

Abgabe Donnerstag, 24.1.2002, vor der Vorlesung

Aufgabe 39 (3 Punkte). Sei $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$. Zeigen Sie für das Vektorfeld

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto Ax\ :$$

a) Ist $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto e^{\lambda t} \cdot b$$

eine Flusslinie des Vektorfelds f.

b) Sind $\varphi_1, \varphi_2 :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ Flusslinien des Vektorfelds f, so auch die Linearkombination

$$\varphi = \alpha_1\, \varphi_1 + \alpha_2\, \varphi_2\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \alpha_1\, \varphi_1(t) + \alpha_2\, \varphi_2(t)$$

(mit $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}$).

Aufgabe 40 (mündlich). Es sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie eine Flusslinie $\varphi :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ des Vektorfeldes $x \mapsto Ax$ mit

$$\varphi(0) = \binom{1}{-1}.$$

b) Skizzieren Sie das Vektorfeld und die in a) berechnete Flusslinie φ.

Aufgabe 41 (5 Punkte). Sei $U = U_1(0) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|x\| < 1\right\}$ und

$$\phi : U\ \times]0,\infty[\ \to \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\,,\ (x,r) \mapsto (rx,\ r\sqrt{1-\|x\|^2})\ .$$

a) Zeigen Sie: ϕ ist eine Koordinatentransformation. Geben Sie die Umkehrabbildung ϕ^{-1} an.

b) Berechnen Sie die Ableitung $\partial\phi\,(x,r)$ und zeigen Sie, dass $\partial\phi\,(x,r)$ für alle $(x,r) \in U \times\ ]0,\infty[$ invertierbar ist.

c) Zeigen Sie (z.B. mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz)

$$det\,(\partial\phi\,(x,r)) = \frac{r^n}{\sqrt{1-\|x\|^2}}\,.$$

d) Skizzieren Sie für $n=1$ zwei Koordinatenlinien $]-1,1[\times\{r_0\}$ und $\{x_0\}\times]0,\infty[$ und deren Bilder unter ϕ.

Aufgabe 42 (2 Punkte, Kugelkoordinaten). Sei

$$\begin{aligned} U &:= \,]0,\infty[\, \times \,]-\pi,\pi[\, \times \,]0,\pi[\, \subset \mathbb{R}^3, \\ V &:= \mathbb{R}^3 \setminus ([0,\infty[\, \times \{0\} \times \mathbb{R}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Phi : U \to V, \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \vartheta \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} r\ \cos\alpha\ \sin\vartheta \\ r\ \sin\alpha\ \sin\vartheta \\ r\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \\ \Psi : V \to U, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \arg\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

$$\Psi \circ \Phi \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \vartheta \end{pmatrix} \text{ für alle } \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \vartheta \end{pmatrix} \in U .$$

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2001/02

Übungen zur Mathematik III

– Blatt 12 –

Abgabe Donnerstag, 31.1.2002, vor der Vorlesung

Aufgabe 44 (4 Punkte). Sei $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ rotationssymmetrisch, d.h. es existiert $g :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = g(\|x\|) \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\,.$$

Ferner sei g differenzierbar und ϕ die Koordinatentransformation aus Aufgabe 41,

$$\phi : U \times]0, \infty[\to \mathbb{R}^n \times]0, \infty[\,, (x, r) \mapsto (rx,\ r\sqrt{1 - \|x\|^2}).$$

Begründen Sie, dass $f \circ \phi$ total differenzierbar ist, und berechnen Sie $\partial(f \circ \phi)(x, r)$

a) direkt, d.h. indem zunächst $f \circ \phi$ berechnet wird,

b) mit der Kettenregel.

Aufgabe 45 (4 Punkte). Seien $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^1-Funktionen,

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ (x, y) \mapsto p(x) \cdot q(y) - 1$$

und $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(a, b) = 0$ und $q'(b) \neq 0$. Zeigen Sie, dass es ein offenes Intervall I gibt mit $a \in I$ sowie eine C^1-Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(a) = b \qquad \text{und} \quad f(x, \varphi(x)) = 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in I\,.$$

Geben Sie dazu eine Begründung

a) mit Satz 10.4 (SIF),

b) mit Mitteln der Analysis einer Variablen. Geben Sie eine konkrete Formel für φ an.

Aufgabe 46 (mündlich). Zeigen Sie: Ist $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ mit $e^a \cdot b \cdot e^b = 1$, so hat die Gleichung $e^x \cdot y \cdot e^y = 1$ um (a, b) eine glatte Auflösung nach y.

Aufgabe 47 (3 Punkte). Mit $U :=]0, \infty[\times]{-\pi}, \pi[$ und $V := \mathbb{R}^2 \setminus (\,]-\infty, 0] \times \{0\})$ sei

$$\phi : U \to V,\ \begin{pmatrix} r \\ \alpha \end{pmatrix} \ \mapsto\ \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix}$$

die Koordinatentransformation aus Absatz 10.1 (Polarkoordinaten). Begründen Sie (mit SUF), dass $\phi^{-1} : V \to U$ in C^1 ist und berechnen Sie

$$\partial(\phi^{-1})\left(\phi\begin{pmatrix} r \\ \alpha \end{pmatrix}\right).$$