Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2001/02

Mathematik III

– Klausur –

Donnerstag, 7.2.2002.15-13.45 Uhr, HG 5

Name ____________________________________

Vorname __________________________________

Wichtig, bitte beachten:

1. Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt.
2. Vergessen Sie nicht, dieses **deutlich lesbar** mit Ihrem Namen zu versehen.
3. Dieses Deckblatt zuletzt mit Ihrem Namen versehen und mit abgeben.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Punkte	3	3	4	3	3,5	4	3	5	3	3,5	35
Erreicht											

Aufgabe 1 (3 Punkte). Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers

$$K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^4 \leq 1\}.$$

Aufgabe 2 (3 Punkte). Es sei $f \in C([a,b])$. Zeigen Sie

$$\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a} \cdot \|f\|_\infty$$

und geben Sie für $[a,b] = [0,1]$ ein Beispiel an mit

$$\|f\|_\infty \geq 1 \qquad \text{und} \qquad \|f\|_2 \leq \frac{1}{10}\,.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Begründen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto cos^2\,\pi\,x - \sin^2\,\pi\,x$ 1-periodisch ist und berechnen Sie die Fourierkoeffizienten c_k von f. Wird f durch die Fourierreihe $\sum c_k\,e_k$ (mit $e_k(x) = e^{2\pi\,i\,k\,x}$) dargestellt?

Aufgabe 4 (3 Punkte). Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin x,\ \ b > 0$ und $S_n :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der kubische Spline zu f mit den Knoten $x_j = j \cdot h,\ j = -1, \ldots, n+1,\ h = \frac{b}{n}$. Wie groß ist n zu wählen, damit für alle $x \in [0,b]$ gilt

$$|S_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{10}?$$

Aufgabe 5 (3,5 Punkte). Es sei für $n \in \mathbb{N},\ \ n \geq 1$

$$a_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{(-1)^n}{n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 .$$

Zeigen Sie, dass (a_n) bzgl. der euklidischen Norm auf dem $\mathbb{R}^2$ konvergiert.
Gilt dies auch bzgl. der French-Railroad-Metrik auf $\mathbb{R}^2$?
Geben Sie eine Begründung für Ihre Antwort.

Aufgabe 6 (4 Punkte). Sei $\lambda \neq 0$,

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos\lambda t \cdot \cos\lambda t \\ \cos\lambda t \cdot \sin\lambda t \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie für ein Intervall $[a, b]$ die Bogenlänge $L(\varphi|_{[a,b]})$ von φ auf $[a, b]$.

b) Geben Sie eine Parametrisierung von φ nach der Bogenlänge an.

Aufgabe 7 (3 Punkte). Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\binom{x}{y} \mapsto \sin \pi x y^2$ und $v = (a)b \in \mathbb{R}^2$ mit $\|v\|_2 = 1$.
Berechnen Sie die Richtungsableitung $\partial_v\, f\binom{1}{1}$.
Für welches v ist $\partial_v\, f\binom{1}{1}$ maximal? Geben Sie dieses v an.

Aufgabe 8 (5 Punkte). Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\binom{x}{y} \mapsto x^2 + \alpha\, x\, y + y^2$.
Zeigen Sie: f hat im Punkt $\binom{0}{0}$

a) für $|\alpha| < 2$ ein lokales isoliertes Minimum,

b) für $|\alpha| > 2$ kein lokales Extremum,

c) für $|\alpha| = 2$ ein lokales Minimum, das nicht isoliert ist.

Aufgabe 9 (3 Punkte). Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\binom{x}{y} \to x^3 + y \cdot e^y$.
Zeigen Sie: Es existiert ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$, so dass die Gleichung $f\binom{x}{y} = 0$ für jedes $x \in I$ eine Lösung hat.

Aufgabe 10 (3,5 Punkte). Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\binom{x}{y} \mapsto \binom{e^x \sin y}{e^x \cos y}$. Zeigen Sie:

a) zu jedem Punkt in $\mathbb{R}^2$ gibt es eine Umgebung U, so dass f auf U injektiv ist,

b) f ist auf $\mathbb{R}^2$ nicht injektiv.