Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2002

Übungen zur Funktionalanalysis

– Blatt 1 –

Abgabe Donnerstag, 18.4.2002, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (3 Punkte). Sei $k \in \mathbb{N}$ $(= \{0, 1, 2, \ldots\})$ und

$$C^k([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{K} \mid f \text{ ist } k\text{-mal stetig differenzierbar}\},$$

$\partial^j f$ $(= f^{(j)})$ sei die j-te Ableitung von f. Zeigen Sie:

$$C^k([a,b]) \ni f \mapsto \sum_{j=0}^{k} \|\partial^j f\|_\infty =: \|f\|_{\infty,k}$$

ist eine Norm auf $C^k([a,b])$ und $C^k([a,b])$ ist damit ein Banachraum.

Aufgabe 2 (mündlich). Zeigen Sie: Auf $C([0,1])$ ist $f \mapsto \int\limits_0^1 |f(t)|\,dt =: \|f\|_1$ eine Norm, bzgl. derer $C([0,1])$ unvollständig ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte).

a) Es sei
$$\partial : C^1([0,1]) \to C([0,1]) : f \to \partial f := f'.$$
Untersuchen Sie ∂ auf Stetigkeit als Abbildung

i) $(C^1([0,1]), \|\cdot\|_{\infty,1}) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$,

ii) $(C^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

b) Zeigen Sie, dass die Identität $f \mapsto f$

i) als Abbildung $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_1)$ stetig ist, aber

ii) als Abbildung $(C([0,1]), \|\cdot\|_1) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ unstetig ist.

c) Bestimmen Sie für die stetigen Abbildungen in a) und b) jeweils die Operatornorm.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.
Beweisen Sie, dass X genau dann vollständig ist, wenn gilt:
Für jede Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \|x_j\| < \infty$ gibt es ein $x \in X$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=0}^{k} x_j = x$.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes Sommersemester 2002

Übungen zur Funktionalanalysis
– Blatt 2 –
Abgabe Donnerstag, 25.4.2002, vor der Vorlesung

Aufgabe 5 (4 Punkte). Sei p eine Halbnorm auf E, $N := \{x \in E \,|\, p(x) = 0\}$. Zeigen Sie:

a) N ist ein Untervektorraum von E und auf $E/_N$ ist durch

$$\| \, \|_p : \; E/_N \to \mathbb{R}_+, \quad x + N \mapsto p(x)$$

eine Norm definiert.

b) Ist (E, p) vollständig, d.h. zu jeder p-Cauchy-Folge $(x_j) \subset E$ existiert ein $x^* \in E$ mit $p(x_j - x^*) \to 0$, so ist $(E/_N, \; \| \, \|_p)$ ein Banachraum.

Aufgabe 6 (4 Punkte). Geben Sie für die folgenden Banachräume E jeweils eine Folge (x_j) in der Einheitskugel $B_1 = \{x \subset E \,|\, \|x\| \leq 1\}$ an, die keine konvergente Teilfolge hat:

a) $\ell^p(\mathbb{Z}), \quad 1 \leq p \leq \infty,$

b) $L^p(\mathbb{R}, \lambda), \quad 1 \leq p \leq \infty,$

c) $(C([0,1]), \; \| \, \|_\infty).$

Aufgabe 7 (mündlich).

a) Zeigen Sie durch Beispiele: Ist $1 \leq p < q \leq \infty$, so ist $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}, \lambda) \not\subset \mathscr{L}^q(\mathbb{R}, \lambda)$ und $\mathscr{L}^q(\mathbb{R}, \lambda) \not\subset \mathscr{L}^p(\mathbb{R}, \lambda)$.

b) Ist $1 \leq p \leq \infty$, $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}, \lambda)$, $K \subset \mathbb{R}$ kompakt, so ist

$$f \cdot 1_K \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}, \lambda) \,.$$

Aufgabe 8 (4 Punkte). Sei E ein unendlich-dimensionaler normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer (algebraischen) Basis $\mathcal{B} = (v_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.
Zeigen Sie: Es gibt eine unstetige lineare Abbildung $\eta : E \to \mathbb{K}$.

Im Kolloquium des Fachbereichs findet am Freitag, den 19. April, ein Vortrag zum Thema “Zur Geschichte der Banachräume L^p und ihrer Klassifikation mittels des in Marburg entwickelten Maß-Algebra-Begriffs” statt. Beginn ist um 16.30 Uhr, Ort: Hörsaal IV. Zuvor gibt es um 16.00 Uhr Tee in Raum 5445 (SR VII).

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes Sommersemester 2002

Übungen zur Funktionalanalysis
– Blatt 3 –
Abgabe Donnerstag, 2.5.2002, vor der Vorlesung

Aufgabe 9 (4 Punkte). Zeigen Sie: Die Untervektorräume (c) und (c_0) von $\ell^\infty(N)$ der konvergenten bzw. Null-Folgen sind Banachräume.

Aufgabe 10 (mündlich). Für einen K-Vektorraum E sei $E^* = \mathrm{Hom}(E, K)$ der algebraische Dualraum. Zeigen Sie:

a) $\eta \in E^* \setminus \{0\} \iff \forall\, x \in E$ mit $\eta(x) \neq 0$ ist

$$E = \text{Kern}\ \eta \oplus \mathbb{K} \cdot x\,.$$

b) Ist E normiert, so ist

$$\eta \in E' \iff \text{Kern}\ \eta \quad \text{ist abgeschlossen}\,.$$

Aufgabe 11 (4 Punkte). Es seien H ein Hilbertraum und $M, N \subset H$ Unterräume mit $M \perp N$. Zeigen Sie, dass $M + N$ genau dann abgeschlossen ist, wenn M und N abgeschlossen sind.

Aufgabe 12 (4 Punkte). Es seien

$$M := \{f \in \ell^2(\mathbb{N}^*) \,|\, f(2n-1) = \frac{1}{n} \cdot f(2n) \quad \text{für alle} \quad n \geq 1\}$$

und

$$N := \{g \in \ell^2(\mathbb{N}^*) \,|\, g(2n-1) = 0 \quad \text{für alle} \quad n \geq 1\}\,.$$

Beweisen Sie:

a) M und N sind abgeschlossene Unterräume von $\ell^2(\mathbb{N}^*)$,

b) $M \cap N = \{0\}$,

c) $M + N \underset{\neq}{\subset} \overline{M + N} = \ell^2(\mathbb{N}^*)$.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes Sommersemester 2002

Übungen zur Funktionalanalysis
– Blatt 4 –
Abgabe Donnerstag, 9.5.2002, vor der Vorlesung

Aufgabe 13 (4 Punkte). Sei $H = C_c(]0,1[)$ mit

$$(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)\,\overline{g(t)}\,dt =: \langle f|g\rangle\,.$$

Zeigen Sie:

a) H ist damit ein Prä-Hilbertraum, H ist unvollständig.

b) $M := \{f \in H \mid \int_0^1 f(t)\,dt = 0\}$ ist abgeschlossene Hyperebene in H mit $M^\perp = \{0\}$.

Aufgabe 14 (5 Punkte). Sei $H = L^2([0,1])$ mit der ONB $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ aus Bsp. 2.3.1, also $e_k = e^{2\pi i k(\cdot)}$.

a) Sei $f = \mathrm{id}_{[0,1]}$. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten $\langle f|e_k\rangle$ und zeigen Sie damit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

b) Sei $f \in H$ mit $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f|e_k\rangle| < \infty$.

Zeigen Sie: $f \in C([0,1])$ mit $f(0) = f(1)$ und es gilt

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f|e_k\rangle\, e_k = f \;\text{ in }\; (C([0,1]),\ \|\ \|_\infty)\,.$$

Aufgabe 15 (mündlich). Sei H ein Hilbertraum, $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine ONB und $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ein ONS in H mit $\sum_{j=0}^{\infty} \|y_j - z_j\|^2 < 1$.

Zeigen Sie: (z_j) ist ebenfalls ONB von H.

Aufgabe 16 (3 Punkte). Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $e_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{i\lambda t}$ und sei $H := \mathrm{Span}\,(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$.

Zeigen Sie:

a) $H \times H \ni (f,g) \mapsto \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$ ist ein Skalarprodukt auf H.

b) $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ ist eine ONB von H.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2002

Übungen zur Funktionalanalysis

– Blatt 5 –

Abgabe Donnerstag, 23.5.2002, vor der Vorlesung

Aufgabe 17 (6 Punkte). Für $f : [-1,1] \to \mathbb{K}$ sei

$$\check{f} : [-1,1] \to \mathbb{K} : \check{f}(x) = f(-x)\,.$$

Es sei $L^2_g([-1,1]) := \{f \in L^2([-1,1]) \,|\, f = \check{f}\}$ der Raum der geraden und $L^2_u([-1,1]) := \{f \in L^2([-1,1]) \,|\, f = -\check{f}\}$ der Raum der ungeraden L^2-Funktionen. Zeigen Sie:

a) $L^2([-1,1])$ ist die orthogonale Summe von $L^2_g([-1,1])$ und $L^2_u([-1,1])$.

b) Die Abbildungen

$f \mapsto \sqrt{2} \cdot f|_{[0,1]} : L^2_g([-1,1]) \to L^2([0,1])$

$f \mapsto \sqrt{2} \cdot f|_{[0,1]} : L^2_u([-1,1]) \to L^2([0,1])$

$f \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot f\left(\frac{\cdot+1}{2}\right) : L^2([0,1]) \to L^2([-1,1])$

sind Norm-Isomorphismen.

c) Die Systeme $\{\sqrt{2} \cdot \sin(k\pi\cdot) \,|\, k \geq 1\}$ und $\{1, \sqrt{2} \cdot \cos(k\pi\cdot) \,|\, k \geq 1\}$ sind ONB von $L^2([0,1])$.

d) Für $f \in C^1([0,1])$ mit $f(0) = f(1) = 0$ ist

$$\|f\|_2 \leq \frac{1}{\pi}\,\|f'\|_2\,.$$

Für welche solcher f gilt Gleichheit?
Hinweis: Parsevalgleichung.

Aufgabe 18 (mündlich). Sei H ein Hilbertraum und $M \subset H$ ein dichter Untervektorraum. Zeigen Sie: Es gibt eine ONB $\mathcal{B}$ von H mit $\mathcal{B} \subset M$.

Aufgabe 19 (5 Punkte). Sei E ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $A \subset E$ offen, konvex mit $0 \in A$. Zeigen Sie:

a) $q : E \to \mathbb{R}_+,\;\; x \mapsto \inf\{\lambda > 0 \,|\, x \in \lambda A\}$ ist definiert und ein sublineares Funktional.

b) $\{x \in E \,|\, q(x) < 1\} = A$.

c) Unter welchen Zusatzvoraussetzungen an A ist q

i) eine Halbnorm,

ii) eine Norm?

Aufgabe 20 (4 Punkte). Es seien E ein normierter Raum und M ein Unterraum von E. Zeigen Sie:
Zu jedem $x \in E$ mit $d := \operatorname{dist}(x, M) > 0$ gibt es ein $\eta \in E'$ mit $\eta(x) = 1, \ \eta(y) = 0$ für alle $y \in M$ und $\|\eta\| = \frac{1}{d}$.

Aufgabe 21 (3 Punkte). Es seien E ein Banachraum, $f : E \to E$ eine stetige Abbildung und $x : [t_0, t_1] \to E$ eine Lösung von

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad \text{für alle} \quad t \in [t_0, t_1]\,.$$

Dabei ist

$$\dot{x}(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \cdot (x(t+\tau) - x(t))\,.$$

Zeigen Sie:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x(\tau))d\tau \quad \text{für alle} \quad t \in [t_0, t_1]\,.$$

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2002

Übungen zur Funktionalanalysis
– Blatt 6 –
Abgabe Montag, 3.6.2002, vor der Vorlesung

Aufgabe 22 (4 Punkte). Zeigen Sie, dass ein Norm-Isomorphismus definiert ist durch

$$\Phi : \ell^1(\mathbb{N}) \to c_0(\mathbb{N})' : g \mapsto \Phi(g), \qquad \text{mit} \qquad \Phi(g)(f) := \sum_{j=0}^{\infty} f(j)\ g(j).$$

Aufgabe 23 (3 Punkte). Zeigen Sie: Ist E ein unendlich dimensionaler normierter Raum, so ist die schwache Topologie σ auf E' echt gröber als die Normtopologie.

Aufgabe 24 (3 Punkte). Es sei μ ein σ-endliches Maß auf einer Menge A, $g \in L^1(A, \mu)$,

$$\eta : L^\infty(A, \mu) \to \mathbb{K} : f \mapsto \int_A f \cdot g \, d\mu\,.$$

Beweisen Sie die Existenz einer Funktion $h \in L^\infty(A, \mu)$ mit $\|h\|_\infty = 1$ und

$$\eta(h) = \|\eta\| = \sup\{|\eta(f)| \mid f \in L^\infty(A, \mu),\ \|f\|_\infty \le 1\}\,.$$

Aufgabe 25 (mündlich). Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, nicht leer, und $f \in L^1_{loc}(G)$, d.h. $f \in L^1(K)$ für alle Kompakta $K \subset G$, und es gelte

$$\Big|\int_G f \cdot \varphi\Big| \ \le\ C \cdot \|\varphi\|_{2,G} \qquad \text{für alle} \quad \varphi \in C_c(G)\,.$$

Zeigen Sie: $f \in L^2(G)$.

Aufgabe 26 (3 Punkte). Sei H ein unendlich dimensionaler Hilbertraum mit schwacher Topologie. Zeigen Sie, dass die Späre S nicht schwach kompakt ist:

$$S := \{x \in H \mid \|x\| = 1\}.$$

Aufgabe 27 (6 Punkte). Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$N_n := \left\{ f \in C([0,1]) \mid \exists\, t \in [0,1]\ \ \forall\, s \in [0,1] \setminus \{t\} : \ \left| \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right| \le n \right\}.$$

Zeigen Sie:

a) Ist f in wenigstens einem Punkt differenzierbar, so ist $f \in N_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist N_n abgeschlossen.

c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ besitzt N_n keine inneren Punkte.

Folgern Sie hieraus, dass es in $C([0,1])$ eine nirgends differenzierbare Funktion gibt.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2002

Übungen zur Funktionalanalysis
– Blatt 7 –
Abgabe Donnerstag, 13.6.2002, vor der Vorlesung

Aufgabe 28 (3 Punkte). Zeigen Sie, dass ein unendlich dimensionaler Banachraum E keine abzählbare algebraische Basis hat.

Aufgabe 29 (3 Punkte). Sei E ein Banachraum und $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in E', so dass für alle $x \in E$ gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(x)| < \infty\,.$$

Zeigen Sie, dass

$$M := \{x \in E : \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \text{ existiert}\}$$

ein abgeschlossener Unterraum von E ist.

Aufgabe 30 (4 Punkte). Sei $Q_n : C([a,b]) \to \mathbb{K}$ eine Quadraturformel, d.h. es existiert eine Unterteilung

$$U_n = \{a \le t_{0,n} < t_{1,n} < \cdots < t_{n,n} \le b\}$$

von [a,b] und Koeffizienten $\alpha_{0,n}, \ldots, \alpha_{n,n} \in \mathbb{K}$ mit

$$Q_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{j,n}\, f(t_{j,n})\,.$$

Zeigen Sie:

a) Für eine Folge (Q_n) von Quadraturformel auf $[a,b]$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(f) = \int_a^b f(t)\,dt \qquad \text{für alle} \quad f \in C([a,b])$$

genau dann, wenn gilt

i) $\lim_{n\to\infty} Q_n(f) = \int_a^b f(t)\,dt$ für alle f aus einer dichten Teilmenge $A \subset C[a,b]$,

ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=0}^{n} |\alpha_{j,n}| < \infty$.

b) Ist (Q_n) eine Folge von Quadraturformeln mit Koeffizienten $\alpha_{j,n} \ge 0$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(f) = \int_a^b f(t)\,dt \quad \text{für alle} \quad f \in C[a,b]$$

genau dann, wenn gilt

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(p) = \int_a^b p(t)\,dt \quad \text{für alle Polynome } p.$$

c)(*) Es gibt Quadraturformeln (Q_n) auf $[0,1]$ zur Unterteilung $t_j = \frac{j}{2n}$, $j = 0, \ldots, n$, die die Bedingung i) aus Teil a), aber nicht ii) erfüllt.

Aufgabe 31 (2 Punkte). Für normierte Räume E, F, G konvergiere $(T_j) \subset \mathscr{L}(E,F)$ und $(S_j) \subset \mathscr{L}(F,G)$ punktweise gegen $T \in \mathscr{L}(E,F)$ bzw. $S \in \mathscr{L}(F,G)$.
Zeigen Sie: Ist F ein Banachraum, so konvergiert die Folge $(S_j T_j)$ punktweise gegen ST.

Aufgabe 32 (2 Punkte). Seien E, F, G Banachräume. Zeigen Sie: Ist $S \in \mathscr{L}(F,G)$ injektiv, $T : E \to F$ linear und ST stetig, so ist T stetig.

Aufgabe 33 (3 Punkte). Zeigen Sie: In einer Banachalgebra $\mathcal{A}$ mit Eins $e \neq 0$ gilt

$$ab - ba \neq e \qquad \text{für alle} \quad a, b \in A\,.$$

Hinweis: Sonst wäre $a^n b - b a^n = n a^{n-1} \neq 0$.

Aufgabe 34 (3 Punkte). Es seien $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins $e \neq 0$ und $a, b \in \mathcal{A}$. Beweisen Sie:

a) Ist $e - ab$ invertierbar, so ist auch $e - ba$ invertierbar und es gilt

$$(e - ba)^{-1} = e + b(e - ab)^{-1}\, a\,.$$

b) $\rho(ab) \setminus \{0\} = \rho(ba) \setminus \{0\}$.

c) Geben Sie ein Beispiel dafür, dass $\rho(ab) \neq \rho(ba)$ ist.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes Sommersemester 2002

Übungen zur Funktionalanalysis
– Blatt 8 –
Abgabe Donnerstag, 20.6.2002, vor der Vorlesung

Aufgabe 35 (3 Punkte). Aufgabe 31, Blatt 7.

Aufgabe 36 (a) 2 Punkte, b) mündlich).

a) Es sei $p \in [1, \infty[$, $g \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ und

$$T : \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N}) : f \mapsto g \cdot f\,.$$

Zeigen Sie, dass $T \in \mathscr{L}(\ell^p(\mathbb{N}))$ ist, und bestimmen Sie $\sigma(T)$.

b) Beweisen Sie, dass zu jeder kompakten Teilmenge K von $\mathbb{C}$ ein Hilbertraum H und ein $T \in \mathscr{L}(H)$ existieren mit $\sigma(T) = K$.

Aufgabe 37 (3 Punkte). Sei E ein komplexer Banachraum. Folgern Sie aus dem Satz von Liouville in $\mathbb{C}$ denselben Satz für Banachraum-wertige Funktionen:

Ist $f : \mathbb{C} \to E$ holomorph und beschränkt, so ist f konstant.

Aufgabe 38 (4 Punkte). Es sei die in Beispiel 6.2.1 beschriebene Situation der schwingenden Saite gegeben. Weiter seien $v_a, b_b \in C^2(I) \setminus \{0\}$ Lösungen von $Su = 0$ mit

$$v_a(a) = v_b(b) = 0 \quad \text{und} \quad v_a'(a) = v_b'(b) = 1$$

sowie $w \in C^1(I)$ definiert durch

$$w(s) := \det \begin{pmatrix} v_a(s) & v_b(s) \\ v_a'(s) & v_b'(s) \end{pmatrix} \qquad \text{für alle} \quad s \in I\,.$$

Zeigen Sie:

a) Für alle $s \in I$ ist

$$-\rho(s)\, w(s) = -\rho(a)\, w(a) =: c \neq 0\,.$$

b) Die Funktion

$$G : I \times I \to \mathbb{K} : (s,t) \mapsto \frac{1}{c} \cdot \begin{cases} v_a(s)\, v_b(t) & \text{für} \quad s \leq t \\ v_a(t)\, v_b(s) & \text{für} \quad t < s \end{cases}$$

ist eine Greensche Funktion von S, d.h. der von dem stetigen Kern $G \in C(I \times I)$ erzeugte Hilbert-Schmidt-Integraloperator $K : C(I) \to C_R^2(I)$ ist die Inverse von S.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2002

Übungen zur Funktionalanalysis
– Blatt 9 –
Abgabe Donnerstag, 27.6.2002, vor der Vorlesung

Aufgabe 39 (mündlich). Geben Sie ein Beispiel für einen Operator $T \in \mathscr{L}(E)$, für den nur die Kerne (oder nur die Bilder) von T^j stabil werden (d.h. Kern $T^q =$ Kern T^{q+1} für ein q, aber Bild $T^j \neq$ Bild T^{j+1} für alle j, bzw. umgekehrt).

Aufgabe 40 (4 Punkte). Seien H ein Hilbertraum und S, T dicht definierte Operatoren in H. Zeigen Sie:

a) $(ST)^* \supset T^* S^*, \quad (S+T)^* \supset S^* + T^*$.

b) Ist $S \in \mathscr{L}(H)$, so gilt in (a) jeweils die Gleichheit.

Aufgabe 41 (3 Punkte). Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $g \in C(G)$, $D_{M_g} := \{f \in L^2(G) \mid f \cdot g \in L^2(G)\}$ und

$$M_g : D_{M_g} \to L^2(G), \quad f \mapsto f \cdot g$$

der Multiplikationsoperator mit g.

a) Zeigen Sie: M_g ist dicht definiert und abgeschlossen.

b) Bestimmen Sie M_g^*.

Aufgabe 42 (5 Punkte). Sei $K : L^2(A) \to L^2(A)$ ein Hilbert-Schmidt-Operator,

$$Kf = \int_A k(\cdot, t)\, f(t)\, dt$$

mit $k \in L^2(A \times A)$, $\quad A \subset \mathbb{R}^n$ messbar.
Zeigen Sie:

a) K^* ist ebenfalls Hilbert-Schmidt-Operator, geben Sie K^* an.

b) K ist ein abstrakter Hilbert-Schmidt-Operator, d.h. für jede ONB (g_j) von $L^2(A)$ gilt

$$\sum_j \|K\, g_j\|^2 \;\leq\; \|k\|_{L^2}^2 \;<\; \infty\,.$$

c) Ist $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von K, so gilt

$$\dim \text{Kern}\, (\lambda\, \text{Id} - K) \leq \frac{\|k\|_{L^2}^2}{|\lambda|^2}.$$

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2002

Übungen zur Funktionalanalysis

– Blatt 10 –

Abgabe Donnerstag, 4.7.2002, vor der Vorlesung

Aufgabe 43 (4 Punkte). Sei $\emptyset \neq I$ ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und $a = \inf I$, $b = \sup I$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $H^1_\alpha(I) := \{u \in H^1(I) \mid u(a) = \alpha\, u(b)\}$. Der Operator P_α in $L^2(I)$ sei gegeben durch

$$D_{P_\alpha} = H^1_\alpha(I), \quad P_\alpha(u) = \frac{1}{i}\,\partial\, u, \quad u \in D_{P_\alpha}\,.$$

Bestimmen Sie P^*_α. Für welche I und α gilt $P^*_\alpha = P_\alpha$?

Aufgabe 44 (4 Punkte). Sei $g \in C(\mathbb{R})$ und M_g der Multiplikationsoperator in $L^2(\mathbb{R})$

$$M_g : D_{M_g} \to L^2(\mathbb{R}), \;\; f \mapsto f \cdot g$$

aus Aufgabe 41. Zeigen Sie:

a) $\sigma_P(M_g) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \{g = \lambda\}$ ist keine Nullmenge$\}$.

b) $\sigma(M_g) = \overline{g(\mathbb{R})}$.

Hinweis. Ist $\lambda \in \overline{g(\mathbb{R})}$, so existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}^*$ ein beschränktes Intervall $\emptyset \neq I_k$ mit

$$|g(x) - \lambda| \leq \frac{1}{k} \;\text{ für alle }\; x \in I_k\,.$$

Aufgabe 45 (4 Punkte). Man betrachte den dicht definierten Operator

$$P_m : H^1(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) : u \to \frac{1}{i}\,\partial\, u\,.$$

Zeigen Sie

a) $\sigma_P(P_m) = \emptyset$, b) $\sigma(P_m) = \mathbb{R}$.

Hinweis. Betrachte $g = e^{i\,\lambda\cdot} \cdot \varphi$ mit $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ und $\int_{\mathbb{R}} \varphi \neq 0$.

Aufgabe 46 (mündlich). Es sei

$$S : C^{(2)}_R(I) \to C(I)$$

der Sturm-Liouville-Operator aus Beispiel 6.2. Zeigen Sie, dass S als Operator in $L^2(I)$ wesentlich selbstadjungiert ist.

Hinweis. Für den wie in Aufgabe 38) definierten Hilbert-Schmidt-Integraloperator $K \in \mathscr{L}(L^2(I))$ gelten:

1. $S \pm i\,\mathrm{id} \;=\; (\mathrm{id} \pm i\,K)\,S$.
2. K ist selbstadjungiert.