Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes Sommersemester 2003

Übungen zur Analysis II

– Blatt 0 –

Abgabe Dienstag, 22.4.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (mündlich). Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}.$$

a) Bestimmen Sie alle stetigen Funktionen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar sind und für die $F'(x) = f(x)$ gilt für alle $x \neq 0$.

b) Hat f eine Stammfunktion?

Aufgabe 2 (7 Punkte). Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^n dx\,, \quad \int_0^1 x(1-x^2)^n dx, \quad n \in \mathbb{N}_0$

b) $\displaystyle\int_e^5 \frac{1}{x \ln x}\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^x e^{at} \cos bt\; dt; \quad x \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$

d) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1 + \exp(x)}{1 - \exp(x)}\, dx$

e) $\displaystyle\int_0^{-4} \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}$ (Subst. $x = t + c$, c passend)

f) $\displaystyle\int_1^4 \cos(\ln x)\, dx$

Aufgabe 3 (4 Punkte, 3 Zusatzpunkte). Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x^2 - 1)^n \qquad \text{und} \qquad P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2^n n!}\, g_n^{(n)}(x).$$

a) Zeigen Sie (durch partielle Integration):

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\; P_m(x)\, dx \; = \begin{cases} 0\,, & \text{für } \; n \neq m \\ c_n > 0 & \text{für } \; n = m \end{cases}$$

b) $(*)$ Zeigen Sie genauer

$$c_n = \frac{2}{2n+1}.$$

Aufgabe 4 (3 Punkte). Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_1^{e^x} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Ziege oder Auto, zum zweiten

Die Person, die mit einem Artikel in der US-Zeitschrift Parade 1991 das Ziege-Auto-Problem in die Öffentlichkeit brachte, hatte ein dreifaches Handicap:

- weiblich (mit vollem Namen Marilyn vos Savant)
- intelligent (der höchste je gemessene IQ, 228 Punkte)
- fachfremd (Journalistin)

Ihre Behauptung, dass es günstiger sei, die Tür zu wechseln, nachdem der Spielleiter eine (Ziegen)-Tür geöffnet hatte, stieß auf ein heftiges und fast durchweg negatives Echo, nach Veröffentlichung u.a. in Zeit und Spiegel[1] auch in Deutschland. Viele Zuschriften kamen von ausgewiesenen Fachleuten der Wahrscheinlichkeitstheorie, bei fast allen mit der Quintessenz:

Es bleiben zwei Türen, eine Ziegen- und eine Auto-Tür, die Chancen stehen also halbe-halbe.

Ein Mathematiker schrieb: *"Das haben Sie leider verpatzt! Lassen Sie es mich erklären: Ist eine der Türen als Niete erwiesen, dann ändert diese Information die Wahrscheinlichkeit für jede der beiden verbleibenden Wahlmöglichkeiten – von denen keine einen Grund hat, wahrscheinlicher als die andere zu sein – zu 1/2. Als Berufsmathematiker bin ich über den Mangel an mathematischen Fertigkeiten in der Bevölkerung besorgt. Bitte helfen Sie mit, indem Sie Ihren Fehler eingestehen und in der Zukunft etwas vorsichtiger sind."*

Nicht alle Fachleute äußerten sich so höflich:

"Es gibt schon genug mathematische Unwissenheit in diesem Lande, wir brauchen nicht den höchsten IQ der Welt, um diese Unwissenheit zu vertiefen. Schämen Sie sich!"

"Es gibt schon genug mathematische Unwissenheit in diesem Lande, wir brauchen nicht den höchsten IQ der Welt, um diese Unwissenheit zu vertiefen. Schämen Sie sich!"

[1] Die Zeit vom 19.7.1991, Spiegel vom 19.8.1991

"Vielleicht haben Frauen eine andere Sicht mathematischer Probleme als Männer."

Manche Wissenschaftler bezeichneten Frau Savant "selbst als Ziege", "Auslöser erheblicher Lachsalven in der gesamten mathematischen Fakultät" oder schlicht als "dumme Törin".

Die vielen Fachleute befanden sich nicht unbedingt im Ton, jedoch in der Sache in allerbester Gesellschaft. Paul Erdös, einer der prominentesten Mathematiker des letzten Jahrhunderts und eine Autorität in Wahrscheinlichkeitstheorie, konnte sich nicht mit der Wechseltheorie anfreunden, seine spontane Reaktion war "nein, das ist unmöglich, das kann keinen Unterschied machen". Auch die weiteren Erklärungsversuche seines Kollegen Vazsonyi hatten wenig Erfolg. In dem Buch von Schechter[2] über Erdös ist die Szene so beschrieben:

Vazsonyi erklärte all dies in der Sprache der Mathematik, aber es gelang ihm nicht, Erdös zu überzeugen; dieser begann vielmehr wie die Verfasser der Briefe an vos Savant, sich aufzuregen. "An diesem Punkt angekommen, bedauerte ich es, dass ich das Problem erwähnt hatte", erinnerte sich Vazsonyi. Schließlich stürmte Erdös davon, frustriert von Vazsonyis Erklärungen. Eine Stunde später kehrte er zurück und schrie Vazsonyi an: "Du erklärst mir überhaupt nicht, warum man wechseln soll! Was ist los mit dir?"

Weder Intuition noch profunde Kenntnisse in Wahrscheinlichkeitstheorie scheinen für die Lösung des Problems hilfreich zu sein, die folgende Erklärung hat aber dann doch die meisten Kritiker von M. Savant zum (beschämten) Schweigen gebracht:

Man stelle sich vor, dass zwei Spieler A und B gleichzeitig antreten, A wechselt nie, B immer, der Einfachheit halber beginnen beide mit der gleichen Tür. Einer von beiden gewinnt dann immer, die Chancen von A stehen genau bei 1/3, die von B also bei 2/3, das Auto zu gewinnen.

[2] B. Schechter, Mein Geist ist offen: die mathematischen Reisen des Paul Erdös, Birkhäuser 1999.