Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2002/03

Übungen zur Analysis I

– Blatt 1 –

Abgabe Dienstag, 22.10.2002, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte). Zeigen Sie

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \text{für} \qquad n \geq 1\,,$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1}\,\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \qquad \text{für} \qquad n \geq 0\,,$

c) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (1 + a^{2^k}) = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1-a} \qquad \text{für} \qquad n \geq 0\,, 1 \neq a \in \mathbb{R}\,.$

Aufgabe 2 (3 Punkte). Finden Sie für das Produkt

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

eine “kleine” algebraische Formel und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion.

Aufgabe 3 (4 Punkte).

a) Zeigen Sie $k! > \left(\frac{3}{2}\right)^k$ für $k \geq 3$ und folgern Sie daraus

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{n-3} \left(\frac{2}{3}\right)^{3+k} < 3{,}5 \qquad \text{für alle} \quad n \geq 2\,.$$

b) Zeigen Sie mit ähnlichen Überlegungen

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 2{,}8 \qquad \text{für alle} \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte). Im Seminar von Prof. X verkündet dieser den 17 Teilnehmern, dass mindestens ein(e) Student(in) überaus brillante Leistungen erbracht hat. Jeder, der solche Leistungen erbracht hat, soll, sobald er sich dessen sicher ist, das Seminar nicht weiter besuchen.
Die Studenten würden dies auch gerne tun, das Problem ist jedoch, dass jeder Student sich jeweils nur der Leistungen aller übrigen Seminarteilnehmer sicher ist. 16 weitere Seminarsitzungen finden bei unveränderter Teilnehmerzahl statt. In der 17. Sitzung steht Prof. X allein im Saal.
Geben Sie eine (brillante) Erklärung.

b/w

Ein mathematischer und ein künstlerischer Kommentar zu unseren didaktischen Hilfsmitteln

Ein Studienanfänger in Mathematik braucht für den Anfang eigentlich gar kein Lehrbuch, die Vorlesungen sind autark, und die wichtigste Arbeitsgrundlage des Studenten ist seine *eigenhändige* Vorlesungsmitschrift. Weshalb diese Anstrengung? Es ist, als ob die Information durch Auge und Ohr erst einmal in die Hand gehen müßte, um im Gehirn richtig anzukommen. Vielleicht hängt das damit zusammen, dass Sie beim Ausüben von Mathematik ja auch wieder schreiben müssen. Aber was immer der Grund sei: Erfahrung sagt's.

Klaus Jänich, Lineare Algebra, Springer 1996.

O Mensch, tu dieser nichts zu Leide,
Dies ist kein Bleistift, sondern Kreide.
Sie hat Berechtigung zu denken,
Drum wolln' wir ihr nich weiter kränken.

Kurt Schwitters (1887-1948). *Auguste Bolte*

Zum Erwerb des Übungsscheins der Vorlesung Analysis I sind die folgenden Bedingungen zu erfüllen:

- Regelmäßige und aktive Mitarbeit in Tutorien.
- Von den schriftlich zu bearbeitenden Aufgaben sind 50% der Punkte zu erreichen. (Mit $*$ gekennzeichnete Aufgabenpunkte gehören zum Haben, aber nicht zum Soll.)
- Von den mündlich zu bearbeitenden Aufgaben sind 1/3 vorzubereiten.
- In zwei Klausuren ist insgesamt eine vorgegebene Punktsumme zu erreichen, davon mindestens ein Viertel aus der zweiten Klausur.

Bei der Festlegung der Note des Übungsscheins geht das Resultat aus den Klausuren mit dem Faktor 2/3 ein

Klausuren
Mittwoch, 18.12.2002, 16-19 Uhr, HG 215 (Auditorium maximum),
Samstag, 8.2.2003, 10-13 Uhr, HS A + B, Hörsaalgebäude Chemie,

Wiederholungsklausur
Donnerstag, 10.4.2003, 9-12 Uhr, HS A + B, Hörsaalgebäude Chemie.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2002/03

Übungen zur Analysis I

– Blatt 2 –

Abgabe Dienstag, 5.11.2002, vor der Vorlesung

Aufgabe 5 (3 Punkte).

a) Seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$. Zeigen Sie

$$\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

b) Entwickeln Sie für $n \in \mathbb{N}^*$ $(1+1)^{2n}$ und $(1-1)^{2n}$ mit der binomischen Formel und folgern Sie

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} = 2^{2n-1}.$$

Aufgabe 6 (mündlich). Seien M und N Teilmengen einer Menge X. Zeigen Sie

a) $X \setminus (M \cup N) = (X \setminus M) \cap (X \setminus N)$

b) $M \setminus N = M \cap (X \setminus N)$

c) $M \subset N \iff M \cap N = M$

Aufgabe 7 (5 Punkte). Es seien $[0,1] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x \leq 1\}$.
Geben Sie jeweils eine Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ an,

a) die nicht injektiv und nicht surjektiv ist,

b) die injektiv, aber nicht surjektiv ist,

c) die nicht injektiv, aber surjektiv ist,

d) die bijektiv, aber nicht die Identität auf $[0,1]$ ist.

Skizzieren Sie in allen vier Beispielen die Graphen.

Aufgabe 8 (4 Punkte). Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und M, N Teilmengen von X.
Zeigen Sie

a) $f(M \cup N) = f(M) \cup f(N)$, b) $f(M \cap N) \subset f(M) \cap f(N)$.

Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass in b) im Allgemeinen nicht "=" gilt.

Teil a) sollte etwa so ablaufen:
Sei $y \in f(M \cup N)$, also existiert ein $x \in M \cup N$ mit $f(x) = y$, $\Longrightarrow \cdots$ also ist $y \in f(M) \cup f(N)$.
Ist umgekehrt $y \in f(M) \cup f(N)$, so folgt ... $y \in f(M \cup N)$.

The unexpected hanging

In einem Mathekurs, der täglich (auch am Wochenende!) stattfindet, kündigt der Prof am Sonntag an, dass nächste Woche ein unerwarteter Test geschrieben wird: "Sie werden am Abend vorher nicht wissen, ob der Test am nächsten Morgen stattfindet".
Die logisch geübten Studierenden schließen messerscharf, dass der Test am nächsten Sonntag nicht stattfinden kann (sonst ...), und folgern induktiv, dass der Test garnicht stattfinden kann.
Zu ihrer Überraschung findet völlig unerwartet der Test am Mittwochmorgen statt.
Wo und bei wem liegt der Fehler?

Erhellende Beiträge werden mit unerwarteten Extrapunkten belohnt.

Zur Bezeichnungswut der Mathematiker

When a twelfth century youth fell in love he did not take three paces backward, gaze into her eyes, and tell her she was too beautiful to live. He said he would step outside and see about it. And if, when he got out, he met a man and broke his head – the other man's head, I mean – then that proved that his – the first fellow's – girl was a pretty girl. But if the other fellow broke his head – not his own, you know, but the other fellow's – the other fellow to the second fellow, that is, because of course the other fellow would only be the other fellow to him, not the first fellow who – well, if he broke his head, then his girl – not the other fellow's, but the fellow who was the — Look here, if A broke B's head, then A's girl was a pretty girl; but if B broke A's head, then A's girl wasn't a pretty girl, but B's girl was.

Morris Kline, Mathematics in Western Culture, 1872, zitiert nach Heuser, 1991, S. 13

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2002/03

Übungen zur Analysis I

– Blatt 3 –

Abgabe Dienstag, 12.11.2002, vor der Vorlesung

Aufgabe 9 (5 Punkte).

a) Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ bijektive Abbildungen. Zeigen Sie: $g \circ f$ ist bijektiv und geben Sie die Umkehrabbildung an.

b) Zwei Mengen X, Y heißen *gleich mächtig*, wenn eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ existiert. Man schreibt dann $X \cong Y$. Zeigen Sie:

   i) $[0, \infty[\;\cong\; [0, 1[$ mit der Bijektion $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$.

   ii) $]0, 1] \;\cong\; [0, 1[$ und analog $]n, n+1] \;\cong\; [n, n+1[$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   iii) $]0, \infty[\;\cong\; [0, \infty[$.

Aufgabe 10 (5 Punkte). Man stelle fest, welche der folgenden Implikationen über reelle Zahlen x, a, b allgemeingültig bzw. i.a. falsch sind. Man beweise die allgemeingültigen Aussagen und gebe für die übrigen Aussagen ein Gegenbeispiel an:

a) $|x - a| < b \implies x > a - 2b$.

b) $ab > 1$ und $a < 1 \iff b > 1$.

c) $x(x - 2a^2) > 0 \iff |x - a^2| > a^2$.

d) $\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$.

e) $\min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$.

Aufgabe 11 (3 Punkte). Es sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie: Ist $c > 0$, so ist M genau dann nach oben beschränkt, wenn $c \cdot M$ nach oben beschränkt ist, und dann gilt

$$\sup(c \cdot M) = c \cdot \sup(M).$$

b) Was sind die entsprechenden Aussagen für $c = 0$ bzw. $c < 0$?

Aufgabe 12 (mündlich). Es sei (S_1, S_2) ein *Schnitt in* $\mathbb{R}$, d.h. S_1, S_2 sind nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $S_1 \cup S_2 = \mathbb{R}$ und $S_1 \le S_2$. Zeigen Sie: Es existiert genau ein $s \in \mathbb{R}$ mit $S_1 \le s \le S_2$.
Was ändert sich am Resultat und der Argumentation, wenn man einen Schnitt in $\mathbb{Q}$ betrachtet?

Auszüge aus

R. Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Vieweg 1905.

Darin ist die erste Konstruktion der reellen aus den rationalen Zahlen (die dort mit R bezeichnet werden) durchgeführt.

Man vergleiche dazu auch Aufgabe 12).

„Zerfallen alle Puncte der Geraden in zwei Classen von der Art, daß jeder Punct der ersten Classe links von jedem Puncte der zweiten Classe liegt, so existirt ein und nur ein Punct, welcher diese Eintheilung aller Puncte in zwei Classen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke hervorbringt."

Wie schon gesagt, glaube ich nicht zu irren, wenn ich annehme, daß Jedermann die Wahrheit dieser Behauptung sofort zugeben wird; die meisten meiner Leser werden sehr enttäuscht sein, zu vernehmen, daß durch diese Trivialität das Geheimniß der Stetigkeit enthüllt sein soll.

Ist nun irgend eine Eintheilung des Systems R in zwei Classen A_1, A_2 gegeben, welche nur die charakteristische Eigenschaft besitzt, daß jede Zahl a_1 in A_1 kleiner ist, als jede Zahl a_2 in A_2, so wollen wir der Kürze halber eine solche Eintheilung einen Schnitt nennen und mit (A_1, A_2) bezeichnen.

Jedesmal nun, wenn ein Schnitt (A_1, A_2) vorliegt, welcher durch keine rationale Zahl hervorgebracht wird, so erschaffen wir eine neue, eine irrationale Zahl α, welche wir als durch diesen Schnitt (A_1, A_2) vollständig definirt ansehen; wir werden sagen, daß die Zahl α diesem Schnitt entspricht, oder daß sie diesen Schnitt hervorbringt.

Das folgende Namensverzeichnis stammt aus H. Hasse, Vorlesungen über Zahlentheorie, Springer 1964. Es bezieht sich auf den Ausspruch von Kronecker:

"Die ganzen Zahlen hat der Liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk".

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2002/03

Übungen zur Analysis I

– Blatt 4 –

Abgabe Dienstag, 19.11.2002, vor der Vorlesung

Aufgabe 13 (4 Punkte). Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf Beschränktheit nach oben und bestimmen Sie gegebenenfalls das Supremum. Welche dieser Suprema sind Maxima?

a) $M = \left\{ 1 - \dfrac{1}{n^2} \ : \ n \geq 1 \right\}$

b) $M = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \ \dfrac{x^3}{(x+2)^2} > 1, \ x \neq -2 \right\}$

c) $M = \left\{ \dfrac{x}{|x+3|} \ : \ x \in \mathbb{R}, \ x \neq -3 \right\}$

Aufgabe 14 (mündlich). Seien $n, m \in \mathbb{N}^*$. Zeigen Sie:
Es gibt eindeutige Zahlen $k \in \mathbb{N}$, $\ell \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ mit

$$n = k \cdot m + \ell \, .$$

Hinweis: Definieren Sie k als Maximum einer geeigneten Menge.

Aufgabe 15 (4 Punkte). Sind p und q ungerade ganze Zahlen, so besitzt

$$x^2 + 2px + 2q = 0$$

keine rationale Lösung.

Aufgabe 16 (5 Punkte). Wir wollen die Existenz von $\sqrt{2}$ in $\mathbb{R}$ nachweisen. Dazu sei

$$M := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0 \ \text{ und } \ x^2 \leq 2\}.$$

Zeigen Sie:

a) $M \leq 2$.

b) Ist $c > 0$ mit $c^2 < 2$ und $0 < h < \min\left(1, \ \dfrac{2 - c^2}{2c + 1}\right)$, so ist $(c+h)^2 < 2$.

c) Ist $c > 0$ mit $c^2 > 2$, so existiert ein $h > 0$ mit $(c-h)^2 > 2$.

Folgern Sie: Für $s := \sup M$ gilt $s^2 = 2$, also $s = \sqrt{2}$.

The Unexpected Hanging

Trotz vieler Beiträge anderer scharfsinniger Autoren eine persönliche (und sicher nicht die letzte) Auflösung: Der Widerspruch beruht auf einer unterschiedlichen Interpretation von "unerwartet":

Die Schlussfolgerung der Studenten lautet: Wenn der Test unerwartet stattfinden soll, so kann er garnicht stattfinden, oder gleichbedeutend:

Findet der Test statt, so kann er nicht unerwartet stattfinden.
Unter der Voraussetzung, dass der Test stattfindet, behauptet

Der Professor: Der Test findet unerwartet statt,
der Student: Der Test kann nicht unerwartet stattfinden.

Man schließt eine kleine Wette darüber ab, wer nun recht hat, und da es dabei um Geld oder Ehre geht, ist man genötigt, die Spielregeln zu präzisieren. Ob der Test erwartet oder unerwartet stattfindet, kann nur von den Studenten geklärt werden. Was also muss der Student tun, um die Wette zu gewinnen: Er muss an einem Abend (bevor der Test stattgefunden hat), feststellen: "Der Test findet am nächsten Morgen statt". Dies lässt sich sicherlich nicht mit Bestimmtheit vorhersagen, der Student wird nur zufällig einen Treffer landen und damit ist seine These nicht haltbar.

Woher kommt aber der Widerspruch und was sind alternative Thesen. Bezeichnen wir die studentische Interpretation von unerwartet mit "S-unerwartet", so besagt seine Schlussweise:
Die Klausur kann nicht am Sonntag stattfinden, da dieser ausscheidet; auch nicht am Samstag u.s.w., also an keinem Tag.
Die Wette auf S-unerwartet wäre also an jedem Tag nein,
S-erwartet bedeutet dann aber: Mindestens eine Prognose ist ja, es kann demnach auch an jedem Abend der Test vorhergesagt werden. Mit dieser Interpretation gewinnt natürlich der Student die Wette, fraglich ist nur, ob der Prof sich auf die Spielregeln einlässt.

Literatur: M. Gardner, Further Mathematical Diversions, Allen & Unwin

Anmerkungen zu Archimedes, zitiert aus Heuser, Analysis 2, Teubner.

Plutarch erzählt, *dass er* (Archimedes) *im Banne einer ihm wesenseigenen, stets in ihm wirksamen Verzauberung sogar das Essen vergaß, jede Körperpflege unterließ, und wenn er mit Gewalt dazu gebracht wurde, sich zu salben und zu baden, geometrische Figuren auf die Kohlenbecken malte, und wenn sein Körper gesalbt war, mit den Fingern Linien darauf zog, ganz erfüllt von einem reinen Entzücken und wahrhaft von seiner Muse besessen.*

Ewig denkwürdig und rührend ist der Bericht Plutarchs über das Ende des greisen Forschers:

Er war gerade dabei, eine mathematische Figur zu betrachten; und mit Augen und Sinnen ganz in die Aufgabe vertieft, bemerkte er gar nicht den Einbruch der Römer und die Eroberungen der Stadt. Als da plötzlich ein Soldat zu ihm trat und ihm befahl, zu Marcellus mitzukommen, wollte er das nicht, bevor er die Aufgabe gelöst und zum Beweis geführt hätte. Da wurde der Soldat wütend, zog sein Schwert und schlug ihn tot.

Als der römische Adler seinen Schatten über die Länder des östlichen Mittelmeers warf, begann das griechische Denken zu welken. Die imperialen Erdenklöße taten sich nicht wenig darauf zugute, anders als die sonderbaren "Griechlein" die Wissenschaften nur so weit zu treiben, wie es das augenblickliche Bedürfnis gerade gebot (und das heißt, sie gar nicht zu treiben). In die Geschichte der Mathematik greifen sie nur einmal ein: durch den Mord an Archimedes.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2002/03

Übungen zur Analysis I

– Blatt 5 –

Abgabe Dienstag, 26.11.2002, vor der Vorlesung

Aufgabe 17 (3 Punkte). Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$. Begründen Sie, dass für jedes $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to a} f(x) = a^2$$

gilt. Geben Sie zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ an (das von ε und a abhängt), so dass gilt:

$$\text{Aus} \qquad |x - a| < \delta \qquad \text{folgt} \qquad |x^2 - a^2| < \varepsilon\,.$$

Aufgabe 18 (5 Punkte). Gegeben seien die Funktionen

i) $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^3+5x^2-2}{(x+1)^4}$,

ii) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{|x|}{x}$,

iii) $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{[x]}{x}$.

a) Skizzieren Sie die Funktionsgraphen in ii) und iii).

b) Untersuchen Sie, ob $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert, wobei in i) und iii) $a = \infty$ und in ii) $a = 0$ sei, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 19 (5 Punkte). Sei (a_n) die Folge der Fibonacci-Zahlen, also

$$a_0 = a_1 = 1, \qquad a_{n+1} := a_n + a_{n-1}\,,$$

und $g > 0$ der Goldene Schnitt, das heißt

$$g^2 = 1 + g\,.$$

Zeigen Sie

a) $a_n\, g^n - a_{n-1}\, g^{n+1} = (-1)^n$ und $\left|\dfrac{a_n}{a_{n-1}} - g\right| = \dfrac{1}{a_{n-1}\, g^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$,

b) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = g$.

Aufgabe 20 (mündlich). Geben Sie jeweils ein Beispiel für Folgen (a_n) und (b_n) an, mit $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \cdot b_n = 0$ und

a) $\lim\ a_n = \infty$,

b) $\lim\ a_n = 0$,

c) $\lim\ a_n = a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

d) (a_n) divergent, aber nicht bestimmt divergent.

b/w

Das griechische Alphabet

Name	Zeichen	deutsche Entsprechung
Alpha	A; α	a
Beta	B; β	b
Gamma	Γ; γ	g
Delta	Δ; δ	d
Epsilon	E; ε	e
Zeta	Z; ζ	z
Eta	H; η	ä
Theta	Θ, θ	th
Iota	I; ι	i
Kappa	K; κ	k
Lambda	Λ; λ	ℓ
Mü	M; μ	m
Nü	N; ν	n
Xi	Ξ; ξ	x
Omikron	O; o	o (kurz)
Pi	Π; π	p
Rho	P; ρ	r
Sigma	Σ; σ	s
Tau	T; τ	t
Ypsilon	Y; v	y
Phi	Φ, φ	f, ph
Chi	X, χ	ch
Psi	Ψ; ψ	ps
Omega	Ω; ω	o (lang)

Ein Lehrer versucht einem Schüler “klar”zumachen, was eine Nullfolge ist, indem er den Begriff definiert: “Eine Zahlenfolge ist eine Nullfolge, wenn sich zu jeder noch so kleinen positiven Zahl ε eine natürliche Zahl n so bestimmen läßt, dass alle Glieder der Folge mit einer Platzziffer ν größer als n ihrem Betrage nach kleiner als ε sind”.
Der Schüler, der das Prinzip einer auf Null zustrebenden Zahlenfolge vielleicht schon vorher halbwegs erkannt hatte, versucht krampfhaft dem Text zu folgen, doch schon nach den ersten Worten rauscht der Rest dieser genialen Satzkonstruktion nur noch an ihm vorbei.

Dabei hätte der Inhalt unseres hübschen Satzes von der Nullfolge durchaus einfacher wiedergegeben werden können – wenn es überhaupt sinnvoll ist, solche Definitionen zu geben. Ja, je nach der Unterrichtsstufe genügt es vielleicht sogar zu sagen: “Eine Folge von Zahlen geht dann auf Null zu, wenn – ganz abgesehen vom Vorzeichen – jede Zahl kleiner als die vorhergehende ist.” Eine Formulierung, die notwendigerweise unvollkommen ist, die aber das Wesentliche des Prinzips erkennen läßt und auch beim später oft notwendigen Abstrahieren und exakten Formulieren den Rückweg zum eigentlichen Phänomen immer offen läßt.

Aus F. Vester: Denken, Lernen, Vergessen, dtv Sachbuch,

einem im nichtmathematischen Teil durchaus lesenswerten Buch.

Erläutern Sie durch Beispiele, in welchen Punkten die zweite Definition unvollkommen ist.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes Wintersemester 2002/03

Übungen zur Analysis I

– Blatt 6 –

Abgabe Dienstag, 3.12.2002, vor der Vorlesung

Aufgabe 21 (4 Punkte). Sei $a_0 > 0$ und $a_{n+1} := a_0 + (a_n)^2$ für $n \in \mathbb{N}$.
Untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert für

$$a)\;\; 0 < a_0 \leq \frac{1}{4}, \qquad\qquad b)\;\; a_0 > \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 22 (5 Punkte). Es sei (x_n) die Iterationsfolge aus Beispiel 3.17 für $p = 2,\; c > 0,\; x_0 > 0$ mit $x_0^2 > c$ und f_n der relative Fehler:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{c - x_n^2}{2x_n}, \qquad f_n := \left| \frac{x_n - \sqrt{c}}{\sqrt{c}} \right|.$$

Zeigen Sie:

a) $$f_{n+1} = \frac{f_n^2}{2(f_n+1)} \;\leq\; \tfrac{1}{2}\, f_n^2 \;\leq\; 2 \cdot \left(\frac{f_0}{2}\right)^{2^{n+1}} \qquad \text{für alle} \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

b) Für $0 < b' \leq \sqrt{c}$ ist
$$f_0 = \frac{x_0 - \sqrt{c}}{\sqrt{c}} \;\leq\; \frac{x_0 - b'}{b'}\,.$$

c) Berechnen Sie für $c = 10$ und $x_0 = \frac{10}{3}$ den zweiten Näherungswert x_2 für $\sqrt{10}$ und geben Sie eine Abschätzung für den relativen Fehler $f_2 = \left| \frac{x_2 - \sqrt{10}}{\sqrt{10}} \right|$ an.

d) Wieviele Iterationsschritte benötigt man, um $\sqrt{10}$ mit einem relativen Fehler $< 10^{-100}$ zu berechnen?

Aufgabe 23 (mündlich). Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch $a_n := \sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge ist, aber der folgenden Bedingung genügt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a_{n+k}| \;<\; \varepsilon \qquad \text{für alle} \qquad n \geq N\,.$$

Aufgabe 24 (4 Punkte). Untersuchen Sie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ auf Konvergenz, wobei

$$a)\;\; a_k = \frac{1}{k!}, \qquad\qquad c)\;\; a_k = \frac{k^2+3}{k^3+k+1},$$

$$b)\;\; a_k = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}},\;\; a_0 := 0, \qquad\qquad d)\;\; a_k = \frac{2k^2+k+1}{k^4+1}.$$

Die beiden Seiten aus Eulers Differentialrechnung von 1755 zeigen den unbefangenen Umgang mit Grenzwerten in dieser Zeit. In die geometrische Reihe wurde jedes x eingesetzt (vgl. A-D, Seite 91), auch die im Prinzip korrekte Herleitung der geometrischen Reihe auf Seite 94 oben, erfolgt ohne Einschränkungen an x.

INSTITUTIONES CALCULI DIFFERENTIALIS

CUM EIUS VSU

IN ANALYSI FINITORUM

AC

DOCTRINA SERIERUM

AUCTORE

LEONHARDO EULERO

ACAD. REG. SCIENT. ET ELEG. LITT. BORUSS. DIRECTORE
PROF. HONOR. ACAD. IMP. SCIENT. PETROP. ET ACADEMIARUM
REGIARUM PARISINAE ET LONDINENSIS
SOCIO.

IMPENSIS
ACADEMIAE IMPERIALIS SCIENTIARUM
PETROPOLITANAE
1755.

eaque ſine fine, hoc eſt in infinitum continuetur, nullum certe eſt dubium, quin omnium horum terminorum ſumma maior ſit omni numero aſſignabili; eaque propterea infinita ſit neceſſe eſt. Hoc quoque confirmat eius origo, dum oritur ex euolutione fractionis

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \&c.$$

ponendo $x = 1$; erit ergo

$$\frac{1}{1-1} = 1 + 1 + 1 + 1 + \&c.$$

ideoque ſumma $= \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} =$ infinito.

103. Quamuis autem hic nullum dubium naſci queat, cum idem numerus finitus infinities ſumtus in infinitum abire debeat; tamen ipſa origo ex ſerie generali

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \&c.$$

grauiſſima incommoda afferre videtur: ſi enim pro x ſucceſſiue ponantur numeri 1, 2, 3, &c. ſequentes ſeries cum ſuis ſummis prodibunt.

A . . . $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \&c. = \frac{1}{1-1} =$ infinito

B . . . $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \&c. = \frac{1}{1-2} = -1$

C . . . $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \&c. = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}$

D . . . $1 + 4 + 16 + 64 + 256 + \&c. = \frac{1}{1-4} = -\frac{1}{3}$

&c.

 Cum

$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{1-x}.$$

&c.

qui ergo dicere vellet huius ſeriei finitae $1 + x + x^2 + x^3$ ſummam eſſe $\frac{1}{1-x}$, is erraret a vero quantitate $\frac{x^4}{1-x}$: & qui ſummam huius ſeriei

$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots\ldots + x^{1000}$

ſtatuere vellet $= \frac{1}{1-x}$, is erraret quantitate $\frac{x^{1001}}{1-x}$ qui error ſi x ſit numerus unitate maior, foret maximus.

107. Ex his perſpicuum eſt eum, qui eiusdem ſeriei in infinitum continuatae ſeu huius:

$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots\ldots + x^\infty$

ſummam ſtatuere velit $= \frac{1}{1-x}$, a veritate eſſe aberraturum quantitate $\frac{x^{\infty+1}}{1-x}$; quae ſi ſit $x > 1$ vtique erit infinite magna. Simul vero hinc ratio patet, cur ſeriei in infinitum continuatae

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \&c.$$

ſum-

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2002/03

Übungen zur Analysis I

– Blatt 7 –

Abgabe Dienstag, 10.12.2002, vor der Vorlesung

Aufgabe 25 (4 Punkte). Sei $p = 3$.

a) Zeigen Sie: $x \in \,]0, \frac{1}{3}[$ gilt genau dann, wenn für die durch x definierte triadische Zahlenfolge $(a_k)_{k \geq m}$ (mit $x = \sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k \, 3^{-k}$) gilt: $m \geq 2$.

b) Charakterisieren Sie analog die triadischen Folgen für $x \geq 1$.

Aufgabe 26 (mündlich). Sei $(a_k)_{k \geq 1}$ monoton fallend und nichtnegativ, $a_k \geq a_{k+1} \geq 0 \quad \forall\, k \geq 1$. Zeigen Sie:

a) $\frac{1}{2}\, a_{2^{n+1}} \cdot 2^{n+1} \;\leq\; \sum\limits_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \;\leq\; a_{2^n} \cdot 2^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$
und damit

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ konvergiert (Verdichtungskriterium).

b) Ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so gilt $\lim\limits_{k \to \infty} (k \cdot a_k) = 0$.

Aufgabe 27 (5 Punkte). Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz. Geben Sie ggf. die $x \in \mathbb{R}$ an, für die die Reihen konvergieren:

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1} \right)^{k^2}$ (Hinweis: Zeigen Sie $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \geq 2 \quad \forall\, k \geq 1$).

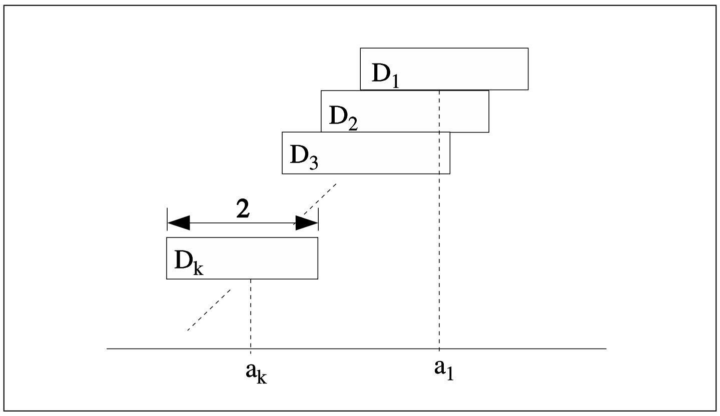
b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k \cdot x^k$.

c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$.

Aufgabe 28 (5 Punkte). Welchen "Gesamtüberhang" kann man durch Aufeinanderlegen beliebig vieler (gleicher) Dominosteine der Länge 2 theoretisch maximal erreichen, so dass das Gebilde stabil bleibt?

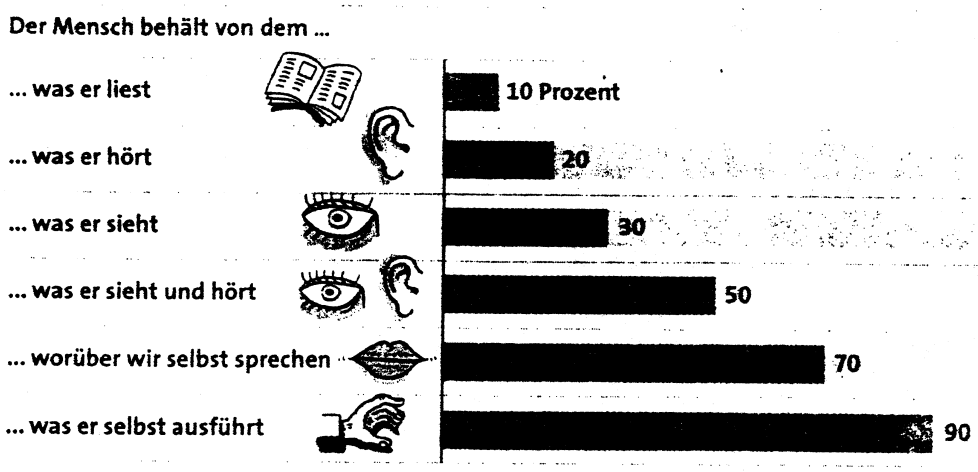
Beachte, dass das System stabil ist, wenn für die x-Koordinate s_k des Schwerpunkts von $D_1, \ldots, D_k$, $\quad s_k := \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} a_j = \frac{1}{k} \left((k-1)\, s_{k-1} + a_k \right)$, gilt: $\quad s_k < a_{k+1} + 1$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$

Dabei ist a_k die x-Koordinate der Mitte des Dominosteins D_k.



Die sinnliche Spur der Erinnerung

Wer lernen will, muss vor allem reden und be-greifen



HANDLUNGSORIENTIERTES LERNEN ist am effektivsten. Diese Einsicht ist seit fast 20 Jahren bekannt. Damals erschien diese Studie der American Audiovisual Society. Ergebnis: Von dem, was wir mit eigenen Händen tun, behalten wir 90 Prozent im Gedächtnis, von dem, worüber wir selbst sprechen, immerhin noch 70 Prozent. Von der reinen Lektüre eines Buches erinnern wir später nur noch 10 Prozent

ZEIT-Grafik/Quelle: „Schülern auf die Sprünge helfen", W. Kowalczik, K. Ottich, rororo 1995

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Übungen zur Analysis I

– Blatt 8 –

Abgabe Dienstag, 17.12.2002, vor der Vorlesung

Aufgabe 29 (3 Punkte). Sei $n \in \mathbb{N}^*$ und $x \in \left[0, \dfrac{n+1}{2}\right]$.

Zeigen Sie

$$\frac{x^k}{k!} \leq \frac{x^n}{n!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-n} \qquad \forall\ k \geq n$$

und folgern Sie

$$0 \leq \exp(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \ \leq\ 2 \cdot \frac{x^n}{n!}\,.$$

Aufgabe 30 (3 Punkte). Sei für alle $k \in \mathbb{N}$

$$a_k = b_k := \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}.$$

Zeigen Sie, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, das Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$ aber divergiert.

Aufgabe 31 (mündlich). Sei $D \subset \mathbb{R}$ und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie: Die Funktionen

$$\max(f,g) : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \max(f(x), g(x))$$

und

$$\min(f,g) : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \min(f(x), g(x))$$

sind stetig. (Hinweis: Aufgabe 10)

Aufgabe 32 (3 Punkte). Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$.

Zeigen Sie: $\quad f = g$, d.h. $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Zur Entwicklung des Funktions- und Stetigkeitsbegriffs

Die ersten beiden Abschnitte stammen aus

R. Lipschitz, *Grundlagen der Analysis*, Chohen & Sohn, 1877,

dort ist das "gegen die Null abnehmen" noch nicht quantifiziert. Die untere Seite ist aus

F. Klein, *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie.* Vorlesung des Sommersemesters 1901, Teubner 1902.

Wenn zu jedem reellen Werth einer Variable x, der zwischen zwei bestimmten Werthen a und b liegt, das heisst, die Bedingung $a \leqq x \leqq b$ erfüllt, eine bestimmte Grösse zugeord-

net ist, welche durch die Ausführung gegebener Vorschriften gefunden wird und für andere und andere Werthe der Variable x andere und andere Werthe annehmen kann, so sagt man, dass der Werth der betreffenden Grösse von der variablen Grösse x abhängt, oder, dass diese Grösse eine Function der Variable x ist.

. . . , *den Begriff der Stetigkeit einer Function.* Die Definition desselben ist die folgende: *Wenn eine Function $f(x)$, welche für alle der Bedingung $a \leqq x \leqq b$ genügenden Werthe von x gegeben ist, die Eigenschaft hat, dass bei je zwei innerhalb dieses Intervalles befindlichen Werthen x und $x+h$ die Differenz der zugehörigen Werthe der Function $f(x+h)-f(x)$ für einen gegen die Null abnehmenden Werth der Grösse h selbst gegen die Null abnimmt, so wird $f(x)$ eine stetige Function der Variable x genannt.*

…vergleichen möge. Es ist hier wie so oft in der Wissenschaft gegangen. Die historische Entwickelung knüpft nur an einen Namen an, während die Möglichkeit zu einer solchen Entwickelung an mehreren Stellen gleichzeitig gegeben war.

Wie lautet nun die Cauchy'sche Definition der Stetigkeit?

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt stetig in einem Intervall, wenn man um jede einzelne Stelle des Intervalls herum einen Bereich so abgrenzen kann, daß innerhalb desselben die Schwankung der Funktion kleiner ist, als eine noch so kleine, vorgelegte Größe η. Oder in Formeln:

Ist ξ eine hinreichend kleine Größe und

$$|x'-x| < \xi, \text{ so ist } |f(x')-f(x)| < \eta,$$

d.h. wenn eine noch so kleine Größe η gegeben ist, dann soll man immer eine Größe ξ so wählen können, daß für die Argumentendifferenz kleiner als ξ auch die Functionsdifferenz kleiner als η ist.

Wir beweisen nun auf Grund dieser Definition, daß eine stetige Funktion in einem Intervall alle Zwischenwerte durchläuft.

Wir beweisen den Satz in einer speziellen Form, bei der aber das allgemeine Princip durchleuchtet.

Es möge $f(x)$ an zwei ganzzahligen Stellen $x = a$ und

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2002/03

Übungen zur Analysis I

– Blatt 9 –

Abgabe Dienstag, 7.1.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 33 (mündlich). Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.
Beschreiben Sie die möglichen Bildmengen.

Aufgabe 34 (5 Punkte).

a) Sei $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Zeigen Sie: sinh ist bijektiv und für die Umkehrfunktion Arsinh gilt:

$$\mathrm{Arsinh}\,(y) \;=\; \ln(y + \sqrt{1+y^2}) \qquad \text{für} \quad y \in \mathbb{R}\,.$$

b) Sei $\cosh : [0, \infty[\to [1, \infty[, \; x \mapsto \frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x})$.

Zeigen Sie: cosh ist bijektiv und für die Umkehrfunktion Arcosh gilt:

$$\mathrm{Arcosh}\,(y) \;=\; \ln(y + \sqrt{y^2-1}) \qquad \text{für} \quad y \in [1, \infty[\,.$$

Aufgabe 35 (3 Punkte). Bestimmen Sie

a) $\lim\limits_{x \to 0+} x^x$

b) $\lim\limits_{x \to 0+} x^{(x^x)}$

c) $\lim\limits_{x \to 0+} (x^x)^x$

Aufgabe 36 (4 Punkte). Das neue Jahr beginnt mit guten Vorsätzen:
Die Studenten Leonhard E., Carl Friedrich G. und Sonja K. wollen endlich ihre Vorlesungen nacharbeiten. Dabei soll das Arbeitspensum jeden Tag um p Prozent gesteigert werden, man beginnt am nullten Tag vorsichtig mit einer Seite.
L.E. will sich täglich um 1 % steigern und fragt sich, wann er bei einem Tagespensum von 2 Blatt angelangt ist.
C.F.G. möchte nach einem Jahr bei einem Tagespensum von 50 Seiten angelangt sein, und
S.K. plant in einem Jahr insgesamt 500 Seiten geschafft zu haben.

Helfen Sie den Kommilitonen, (bei S.K. genügt eine Abschätzung), berechnen Sie ferner, wann die von L.E. täglich beschriebene Papiermenge die Erdmasse erreicht hat.

(1 Blatt Papier 5g, Erdmasse 6.10^{24} kg; für alle Rechnungen sind Exponentialfunktion, natürlicher Logarithmus und ein Taschenrechner zu verwenden).

b/w

Humor in der Mathematik

Eine sehr kleine und sehr subjektive Auswahl zum Thema Humor in der Mathematik, auch wenn ernsthafte Autoren ernstlich behaupten, dass

> "Versuche, Mathematik durch Humor aufzulockern ein Teil der allgemeinen Verwilderung der wissenschaftlichen Sitten sei".

Der Professor schreibt eine längere Formel an die Tafel und kommentiert sie mit "trivial". Dann stockt er einen Moment, murmelt "trivial, trivial?", geht zwei Minuten stumm vor der Tafel auf und ab und verlässt schließlich den Hörsaal. Nach zehn Minuten kommt er zurück, verkündet mit erhobenem Zeigefinger "trivial!", und schreibt die nächste Formel an.

Ein Besucher von Niels Bohr (welcher genau genommen ein Physiker war) bemerkt mit Erstaunen ein Hufeisen über der Eingangstür.

> "Niels, glaubst du wirklich an den Unfug, dass so etwas Glück bringt?"
> "Nein, natürlich nicht, aber ich habe gehört, es bringt auch Glück, wenn man nicht daran glaubt."

Was ist die Reaktion des Mathematikers auf eine fundamental neue Theorie?

1. Völlig absurdes Zeug!
2. Interessant, aber pervers!
3. Außerdem funktioniert's nicht!
4. Korrekt, aber unwesentlich!
5. Das ist trivial!
6. Eigentlich habe ich das schon immer so gemacht!

Mathe-Probleme: Anruf unter $1 - 800 - e^{\sqrt{17} \cdot \ln 3}$.

$\pi = 3$, für genügend kleine π und große 3.

Der kürzeste Mathe-Witz: Sei $\varepsilon < 0$.

Wer noch nicht genug hat, soll sich durch www.mathewitze.de durcharbeiten. Ein Klassiker auf dem wenig erforschten Spannungsfeld von Humor und Mathematik ist

> *F. Wille, Humor in der Mathematik, Vandenhoeck & Ruprecht, 1984,*

aus dem auch das obige Zitat stammt.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2002/03

Übungen zur Analysis I

– Blatt 10 –

Abgabe Dienstag, 14.1.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 37 (mündlich). Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^5 - 5x + 3 = 0$ genau drei reelle Lösungen hat.

Aufgabe 38 (3 Punkte). Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige, auf $]a, b[$ differenzierbare Funktionen mit $f(a) \geq g(a)$ und $f' \geq g'$ auf $]a, b[$. Dann gilt $f \geq g$ auf $[a, b]$. Ist $f' > g'$ auf $]a, b[$, so gilt auch $f > g$ auf $]a, b[$. Beweisen Sie als Anwendung

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1 \qquad \text{für} \quad x > 1$$

und skizzieren Sie die drei Funktionsgraphen.

Aufgabe 39 (5 Punkte). Sei $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \;\; x \mapsto (x^2 - x) \cdot \ln x + \frac{x}{2}$.

a) Bestimmen Sie Lage und Art der lokalen Extrema von f sowie die Bildmenge $f(]0, \infty[)$.

b) Zeigen Sie, dass genau ein $c > 0$ existiert mit $f|_{]0,c[}$ ist konkav, $\quad f|_{]c,\infty[}$ ist konvex.

c) Skizzieren Sie den Graphen von f.

Aufgabe 40 (4 Punkte). Untersuchen Sie die folgenden Grenzwerte auf Existenz und berechnen Sie diese gegebenenfalls

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x}\,, \quad a > 0,\ b > 0$

b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x \left(\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x - e \right)$

b/w

Zum Prioritätenstreit zwischen Newton und Leibniz

Daß der Leibnizsche *calculus differentialis et integralis* so unerhört leistungsfähig war, liegt nicht zuletzt an den glücklichen, nach langem Überlegen und Probieren gefundenen Bezeichnungen

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{und} \quad \int y\,dx,$$

mit denen die Regeln des Kalküls sich so einfach formulieren und handhaben lassen — und außerdem auch noch fast als selbstverständlich erscheinen. Man denke etwa an die Regel zur Differentiation der Umkehrfunktion, die Kettenregel und die Substitutionsregel, die in der Leibnizschen Schreibweise beziehentlich so lauten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

$$\int f(x)\,dx = \int f(u(t))\,\frac{du}{dt}\,dt.$$

Allein schon durch diese Bezeichnungen ist der Leibnizsche *Calculus* weitaus intelligenter als der Newtonsche. Leibniz meinte, seine Differentialrechnung „ermögliche der Mittelmäßigkeit, Probleme anzugreifen, die bisher nur den Hochbegabten zugänglich gewesen“ seien. Als sich die englischen Mathematiker in dem schändlichen Prioritätsstreit zwischen Newton und Leibniz blindlings hinter ihren Landsmann stellten und den ausländischen *Calculus* patriotisch verwarfen, stockte die englische Analysis und die kontinentale zog an ihr mit Riesenschritten vorüber. Der Newtonsche Punkt war dem Leibnizschen d nicht gewachsen. Dieser Zustand der englischen Mathematik änderte sich erst mit dem Anfang des 19. Jahrhunderts. Damals wurde in Cambridge, Newtons Universität, eine Gesellschaft mit der ausdrücklichen Absicht gegründet *to introduce the principles of pure* d*-ism in opposition to the dot-age of the University. Dot-age* ist das Zeitalter des (Newtonschen) Punktes; *dotage* (ohne Bindestrich) heißt aber auch Altersschwachsinn.

Auszug aus Heuser, Analysis 2

Ein entschiedener Verteidiger von Leibniz war Christian Wolff, wie der folgende Auszug aus seinem mathematischen Lexikon zeigt.

Mathematisches
LEXICON,
Darinnen
die in allen Theilen der Mathematick üblichen Kunst-Wörter
erkläret,
und
Zur Historie
der
Mathematischen Wissenschafften
dienliche Nachrichten ertheilet,
Auch
die Schrifften,
wo iede Materie ausgeführet zu finden,
angeführet werden:
Auff Begehren heraus gegeben
von
Christian Wolffen,
K. P. H. und P. P. O.

Leipzig,
Bey Joh. Friedrich Gleditschens seel. Sohn.
1716.

Solchergestalt hat *Mercator* den Anfang gemacht, *Newton* und Leibnitz haben bald die neue Methode erweitert endlich hat der letztere sie fast zu den Gipffel ihrer Vollkommenheit gebracht. Es sind zwar heute zu Tage einige Engelländer und absonderlich Johann Keill, Professor Astronomiæ Savilianæ zu Oxfurt, welche dem *Mercatori* die Erfindung streitig machen, und sie dem Herrn *Newton* zueignen; aber gantz ohne Grund. *Keill* giebet in den Transactionibus Anglicanis N. 342 p. 174 vor, *Mercator* habe weiter nichts gethan, als daß er die unendliche Reihe, wodurch *Brounker* in den Transactionib Anglicanis A. 1668 Mens. Apr. die Hyperbel quadriret, durch die von *Wallisio* vorher publicirte Art der Division demonstriret: allein man kan leicht zeigen, daß er wieder alle Wahrheit redet. Und umb seinen Betrug zu verbergen, hat er auch das Jahr verschwiegen, da *Mercator* seine Logarithmotechniam herausgegeben. In den Transactionibus

Christian Wolff (1679 - 1754) war Professor für Mathematik und Philosophie, zunächst auf Vermittlung von Leibniz in Halle, das er wegen eines theologischen Disputs verlassen musste: Friedrich Wilhelm I. enthob ihn am 8.11.1723 seiner Ämter und wies ihn unter Androhung des Stranges an, Preußen binnen 48 Stunden zu verlassen. Unter diesen Bedingungen fiel es ihm vermutlich nicht schwer, den Ruf nach Marburg anzunehmen, wo er bis 1740 lehrte. Hier schrieb er sein mehrbändiges Kompendium der Mathematik, ein Werk, das eine ganze mathematische Bibliothek ersetzte, gleichzeitig eine der ersten Darstellungen mit ausführlichen Erklärungen.

Internetseite zu Christian Wolff: www.stadtmuseum-halle.de/ojava/da1f.htm

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2002/03

Übungen zur Analysis I

– Blatt 11 –

Abgabe Dienstag, 21.1.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 41 (4 Punkte). Für n-mal differenzierbare Funktionen f, g beweise man die *Leibnizregel*

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)} .$$

Berechnen Sie für $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto x^3 \cdot e^x$

$$h^{(2003)}(x) .$$

Aufgabe 42 (mündlich). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Zeigen Sie

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} .$$

Aufgabe 43 (4 Punkte). Sei $f :]-1, \infty[\to \mathbb{R}, \; x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{2}}$.
Berechnen Sie für $n = 0, 1, 2, 3, 4$ das n-te Taylorpolynom T_0^n von f in 0 und bestimmen Sie für diese n das Vorzeichen von $f(x) - T_0^n(x)$ jeweils für $x \in]-1, 0[$ und $x \in]0, \infty[$.
Zeigen Sie: Für $x \geq 0$ existiert ein $\alpha < 0$ mit $0 \geq (1+x)^{\frac{1}{2}} - T_0^3(x) \geq \alpha \cdot x^4$.
Geben Sie α konkret an.

Aufgabe 44 (3 Punkte). Sei

$$\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ist.
Skizzieren Sie für $\varepsilon = 2, 1, \frac{1}{2}$ die Funktion $\chi_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \frac{1}{\varepsilon} \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

Bestimmen Sie die lokalen Extrema von χ.

Die Regel von de l'Hospital

Im Jahr 1669 publizierte der Marquis de l'Hospital sein Lehrbuch *Analyse infiniments petits, pour l'intelligence des lignes courbès* (Analysis des Unendlichkleinen, zum Verständnis der gekrümmten Kurven). Mit dieser Veröffentlichung legte die Differentialrechnung ihren Status als "Geheimwissenschaft" weniger Auserwählter ab, das Buch fand schnell eine weite Verbreitung. Die Entstehung des Buches ist in einem Artikel aus der Universität Bayreuth (http://did.mat.uni-bayreuth.de/geonet/beispiele/bernoulli /biographie/vertrag) beschrieben, aus dem auch die folgenden Zitate stammen.

Der Marquis war begeistert von den Kenntnissen des jungen Mannes (Johann Bernoulli) aus Basel und ließ sich von ihm Privatunterricht gegen gute Bezahlung geben. Johann hingegen fühlte sich geschmeichelt, dass ein so berühmter Mann wie der Marquis sein Schüler war.

" ... der unter anderen Hochästimierte und fürtreffliche Mathematicus H. Marquis de l'Hospital auß dem uhralten und durchläuchtigen Geschlechte der Hospitaliern, welcher obschon in ordinaria Geometria mit ungemeiner Wissenschaft begabt und es damahls allen französischen Mathematicis zuvorthat, [hat] mich dennoch soviel gewürdigt, daß Er von mir zu lehrnen und in profundiori Mathesi absonderlich in unserem calculo differentiali und integrali sich meiner Instruktion zu unterwerfen sich nicht geschämt hatt."

Der Marquis bezahlte gut, als Gegenleistung wurde am 17.3.1694 ein Abkommen festgeschrieben, in dem Bernoulli sich wissenschaftlich an ihn verkaufte. Er verlangte nämlich:

1. Dass Bernoulli alle mathematischen Gegenstände bearbeite, die er ihm vorlegt.
2. Dass Bernoulli alle seine Entdeckungen ihm und nur ihm mitteile.
3. Dass Bernoulli weder an Varignon noch an andere eine Kopie der dem Marquis überlassenden Schriftstücke weitergebe.

Bernoulli war vom Erscheinen des Buches völlig überrascht und empört, da es in seinem mathematischen Gehalt fast ausschließlich auf seinen Mitteilungen beruhte. Öffentlich konnte Johann den Marquis nicht anprangern, lediglich in Briefen an Huygens und Leibniz tat er seinen Zorn und Kummer kund. So schrieb er an Leibniz:

" ...denn alles mit Ausnahme weniger Seiten (das sage ich Dir ins Ohr und keinem anderen) hat er teils von mir geschrieben bekommen, teils in die Feder diktiert, teils auch nachdem ich Paris verlassen hatte, durch Brief worüber von mir Beweise in Fülle bewahrt werden und zu geeigneter Zeit veröffentlicht werden können, die auch vor der Veröffentlichung des Werkes verschiedene Freunde gesehen und einen guten Teil davon abgeschrieben haben, und besonders besitze ich Briefe von Hospital an mich, die bezeugen, wieviel mir zuzusprechen ist."

Im Jahre 1922 entdeckte man in der Basler Universitätsbibliothek ein Manuskript in der Form eines gewöhnlichen Schreibheftes mit dem Titel *Johanis Bernoulli Lectiones de calculo differentialium.* Ein Vergleich mit l'Hospitals Buch belegt, dass Johann mit seinen Ansprüchen im wesentlichen Recht hatte.

Zur Tragkraft der Regel von l'Hospital lohnt ein Blick in Heuser, Analysis 1. Auf Seite 288 heißt es dort: "Ohne weiteres Zutun wirft uns nun die Regel von de l'Hospital eine Fülle der bemerkenswertesten Grenzwertaussagen in den Schoß", auf Seite 290 stark relativierend: "Der dem Anfänger so teure Glaube an die Wunderkräfte der Regel von de l'Hospital, ist irrig und wird nicht selten mit entnervenden Rechnungen gebüßt".

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2002/03

Übungen zur Analysis I

– Blatt 12 –

Abgabe Dienstag, 28.1.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 45 (5 Punkte). Untersuchen Sie die nachstehenden Funktionenfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

$$\text{a) } f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

$$\text{b) } f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + \frac{1}{n}$$

$$\text{c) } f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \left(x + \frac{1}{n}\right)^2$$

Aufgabe 46 (mündlich). Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0\ , & x = 0 \end{cases}$

und $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(nx)$ für $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie: (f_n) ist punktweise konvergent.
Geben Sie eine (kurze) Begründung dafür, dass (f_n) nicht gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 47 (3 Punkte). Zeigen Sie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, x^k$$

ist auf $[0,1]$ gleichmäßig konvergent, aber nicht normal konvergent.

Aufgabe 48 (5 Punkte).

a) Berechnen Sie für $|x| < 1$ die Summe der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, x^{k-1}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k\, x^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k^2\, x^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}\,.$$

b) Berechnen Sie das Cauchy-Produkt von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ mit sich für $|x| < 1$.
Kommentar ?

Was die guten Vorsätze aus Aufgabe 36 gebracht haben, ist unbekannt, bekannt sind aber die Namenspatrone:

Carl Friedrich Gauß (1777-1855), der größte Mathematiker der Neuzeit, "Fürst der Mathematiker" hat ein Werk hinterlassen, welches auch noch heute für fortgeschrittene Mathematiker eine höchst anspruchsvolle Lektüre darstellt, bemerkenswert ist auch, was er zum Missfallen seiner Zeitgenossen **nicht** veröffentlichte und nur durch seinen ausgedehnten Briefwechsel allmählich bekannt wurde. So schrieb Bessel 1837 an Gauß:

"Wo würden die mathematischen Wissenschaften, nicht allein in Ihrer Wohnung, sondern in ganz Europa jetzt sein, wenn Sie alles ausgesprochen hätten, was Sie aussprechen konnten!"

Eines der Motive von Gauß für seine Zurückhaltung war, dass er von seinen Zeitgenossen für viele seiner Erkenntnisse kein Verständnis erwartete, so schreibt er 1829 an Bessel, dass er seine umfangreichen Untersuchungen zur nichteuklidischen Geometrie nicht veröffentlicht hat, *"da ich das Geschrei der Boeoter (Ignoranten) scheue, wenn ich meine Ansicht ganz aussprechen wollte."*

In einem Brief von 1832 an seinen Freund Bolyai bemerkt er zu der Arbeit des Sohns von Bolyai, in der dieser ein Modell für die nichteuklidische Geometrie konstruiert hat und damit ein immerhin 2000 Jahre altes Problem gelöst hat: *"Wenn ich damit anfange, dass ich solche nicht loben darf, so wirst Du wohl einen Augenblick stutzen: aber ich kann nicht anders; sie loben hiesse mich selbst loben: denn der ganze Inhalt der Schrift, der Weg, den Dein Sohn eingeschlagen hat, und die Resultate zu denen er geführt ist, kommen fast durchgehends mit meinen eigenen, zum Theile schon seit 30-35 Jahren angestellten Meditationen überein."*

Ein weiterer schöner und ganz unmathematischer Brief von Gauß an Bolyai steht auf der Übungsseite am Netz.

Literatur: Briefwechsel von Gauß (17 Bände).

Sonja Kowalewski (1850-1891) war die erste Professorin für Mathematik. ihrem Heimatland Rußland konnte sie damals als Frau nicht studieren, nicht einmal die Ausreise war ihr ohne Heirat möglich. Sie ging deshalb eine Scheinehe ein und reiste mit ihrem Mann in den "fortschrittlichen" Westen. Ihr Studium der Mathematik begann sie in Wien und Heidelberg, wo sie mit Sondererlaubnis als Gasthörerin an Vorlesungen teilnehmen durfte. Auf Anraten ihres Heidelberger Professors wechselte sie nach einem Semester zu dem bedeutendsten Mathematiker der damaligen Zeit, Karl Weierstraß nach Berlin. In Berlin blieb ihr der Besuch von Vorlesungen verwehrt (übrigens auch, nachdem sie in Stockholm zur Professorin ernannt wurde), Weierstraß gab ihr deshalb Privatunterricht und blieb lebenslang ihr Freund und Förderer. Ihre wissenschaftlichen Leistungen wurden von fast allen Fachkollegen anerkannt, ihr beruflicher und privater Lebensweg war in einem nicht gerade frauenfreundlichen Umfeld dennoch kompliziert und schwierig. So schrieb Strindberg 1884, dass *"eine Frau als Mathematikprofessor eine schädliche und unangenehme Erscheinung sei, ja dass man sie sogar ein Scheusal nennen könnte. Die Einladung dieser Frau nach Schweden, das an und für sich männliche Professoren genug habe, die sie an Kenntnissen bei weitem überträfen, sei nur durch die Höflichkeit der Schweden dem weiblichen Geschlecht gegenüber zu erklären."* (wieweit sich Strindberg selbst zu den höflichen Schweden zählte, ist nicht überliefert). In die Wissenschaftgeschichte ist Sonja Kowaleski auch wegen des Nobelpreisgerüchts eingegangen. Gesichert scheint nur, dass Alfred Nobel ihr in Stockholm einen Antrag gemacht hat, den sie ablehnte. Das Gerücht besagt, dass Nobel aus Verärgerung über die Zurückweisung der Mathematik keinen Nobelpreis zuerkannt habe, in der erweiterten Fassung hat sie Nobel wegen des Mathematikers Mittag-Leffler verlassen. Die politisch korrekte Lesart ist heute, dass Nobel in der Mathematik keinen *"Nutzen für die Menschheit"* sah.

Literatur: viele Internetseiten, Biographien.

Leonhard Euler (1707-1783). Eine Darstellung von Leben und Werk dieser *"fleischgewordenen Analysis"* findet sich im Anhang der Analysis 2, p. 680 ff von Heuser.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2002/03

Übungen zur Analysis I

– Blatt 13 –

Abgabe Dienstag, 4.2.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 49 (mündlich). Bestimmen Sie die Konvergenzradien von

$$\text{a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} (2x)^k, \qquad \text{b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^k}, \qquad \text{c)} \sum_{k=1}^{\infty} k^{4711} x^k.$$

Aufgabe 50 (5 Punkte). Es sei $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \text{(vgl. Aufg. 34).}$$

Zeigen Sie

a) tanh ist streng monoton wachsend, $\tanh^{-1}$ ist differenzierbar und

$$(\tanh^{-1})'(y) = \frac{1}{1-y^2} \qquad \text{für} \quad y \in]-1,1[\,.$$

b) Auf $]-1,1[$ wird $\tanh^{-1}$ durch eine Potenzreihe dargestellt. Geben Sie diese konkret an.

Aufgabe 51 (4 Punkte).

a) Zeigen Sie

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$ und geben Sie eine geometrische Deutung.

b) Für welche $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ konvergiert die Folge (z_n) mit

$$z_n := \left(\frac{1+i}{r}\right)^n .$$

Aufgabe 52 (4 Punkte). Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x^2 \cdot \cos \pi/x & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$.

a) Zeigen Sie: f ist differenzierbar, aber f' ist unstetig in Null.

b) Skizzieren Sie den Gaph im Intervall $[0, 1]$.

Eine π-Seite

Abhandlungen über π und Geschichten um π gibt es zwar nicht ganz so viele wie berechnete Dezimalen, aber wesentlich mehr als über jede andere Zahl.

Die bekannteste und kurioseste betrifft eine Gesetzesvorlage des Staats Indiana aus dem Jahr 1897, in der gewisse mathematische Aussagen als wahr festgeschrieben wurden. In Abschnitt 2 heißt es dort

> "Das Verhältnis von Durchmesser und Umfang (des Kreises) ist 5/4 zu 4."

Damit ergibt sich $\pi = 16/5 = 3,2$.

Der Gesetzentwurf stammte von dem Hobby-Mathematiker Edwin J. Goodwin, einer der vielen Kreisquadrierer, der seine Entdeckungen dem Staat Indiana kostenfrei zur Verfügung stellte. Das Gesetz wurde im Repräsentantenhaus in 3. Lesung mit 67 : 0 angenommen, zum Inkrafttreten hätte allerdings der Senat noch zustimmen müssen. Dieser vertagt auf Intervention eines echten Mathematikers, O.A. Waldo, in zweiter Lesung die Vorlage auf unbestimmte Zeit.

Das "Indiana-π" ist zwar schon besser als "$\pi = 3$, für genügend kleine π und große 3", der älteste bekannte Näherungswert (1650 v. Chr.) für π, $256/81 = 3,1604\ldots$ kommt dem richtigen π allerdings schon näher, der in der antike gebräuchliche Wert $22/7 = 3,1428\ldots$ gibt bereits eine gute Approximation.

Lindemann hat 1882 bewiesen, dass π transzendent ist und damit insbesondere die Quadratur des Kreises nicht möglich ist, was bis auf den heutigen Tag nicht alle Quadrierer entmutigt hat.

Auch sonst übt π offensichtlich eine starke Anziehungskraft aus. Es gibt π-Bücher, π-Clubs, π-Shirts, π-Sprüche:

> "Wir Mathematiker sind die Nr. $-e^{i\pi}$ ",

und π-Merkregeln in fast allen Landessprachen:

> "Wie, o dies π macht ernstlich so vielen viele Mühe, ..."
> "Que j'aime a faire apprendre ce nombre utile aux sages!..."
> "Eva o lief, o zoete hartedief uw blauwe oogen zyn wreed bedrogen…"

und natürlich auch π-Rekorde:

Seit 1995 wird z.B. der Rekord für die Anzahl der auswendig aufgesagten Dezimalziffern von π geführt. Er steht jetzt bei 42195 (durch einen Japaner). Die Anzahl der berechneten Dezimalen (durch einen Japaner) beträgt derzeit $3 \cdot 2^{36}$, in Buchform wären dies ca. 2000 Meter, etwa der doppelte Bestand der Bibliothek des Fachbereichs.

Literatur: Zeit Nr. 28, 4. Juli 1997, D. Blatner: The Joy of π, Internetseiten.

Fachbereich Mathematik und Informatik | Wintersemester 2002/03
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Übungen zur Analysis I

– Blatt 14 –

Abgabe Dienstag, 11.2.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 53 (mündlich). Zeigen Sie mit Hilfe der komplexen Darstellung von cos :

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\,\cos(3x) + \frac{3}{4}\,\cos x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 54 (5 Punkte). (Alternative Definition von Cosinus) Es sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ mit $f''(x) = -f(x)\ \ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \ f(0) = 1,\ \ f'(0) = 0$.

a) Begründen Sie, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ist, und bestimmen Sie für $x \in \mathbb{R}$ das n-te Taylorpolynom $T_0^{(n)}(x)$.

b) Zeigen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x) - T_0^{(n)}(x)| = 0$ und damit

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\ T_0^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\ x^{2k} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 55 (4 Punkte). Zeigen Sie : Ist $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ \ n \in \mathbb{N}^*$, so hat die Gleichung $w^n = z$ n verschiedene Lösungen in $\mathbb{C}$. Sind dies alle Lösungen?
Skizzieren Sie für $z = 4i$ und $n = 3$ die Lösungen.

Aufgabe 56 (3+3 Punkte). Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktionen, und $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:

a) $f \cdot g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Regelfunktion.

(∗) b) $F \circ f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Regelfunktion (Hinweis: Satz 5.23).

Ziege oder Auto?

Mathematik erfährt selten öffentliches Interesse und wenn, dann geht es häufig weniger um die Mathematik selbst, sondern mehr um die Begleitumstände.

Ein typisches Beispiel ist das "Indiana-π", nicht ganz so bekannt, aber ebenso kurios ist die Geschichte der "göttlichen Bienen": Aufgrund einer Kette von Vertauschungen und Rechenfehlern stellte der Mathematiker Koenig Anfang des 18. Jahrhunderts fest, dass Bienen ihre Honigwaben so bauen, dass der Wachsverbrauch minimal wird, und zwar mit einem relativen Fehler von höchstens 0,5 Promille. Diese irrige Feststellung führte zu einer Debatte in der französischen Akademie, die in dem berühmten Schiedspruch des Sekretärs zusammen gefasst wurde, in dem er den Bienen die Intelligenz eines Newton und Leibniz absprach, aber zu dem Schluß kam, daß sie göttlicher Lenkung und göttlichem Befehl Folge leisteten, indem sie die höchste Mathematik anwandten. Dieser Rand ist zu schmal, um die ganze wunderbare Geschichte zu fassen, sie ist aber in einem wunderchönen Buch von Hermann Weyl nachzulesen.

Die obige Bemerkung bezieht sich auf die berühmte Notiz zu der 1670 veröffentlichten Vermutung von Fermat:
Für $n \geq 3$ hat $x^n + y^n = z^n$ keine ganzzahligen Lösungen (außer Null). Der Satz wurde 1994 von Andrew Wiles in einem mehr als 100-seitigen Artikel bewiesen, das Ereignis brachte es auch auf die Titelseiten, häufig mit dem ziemlich abwegigen Hinweis, dass Fermat schon eine, noch dazu wunderbar einfache Lösung gefunden habe.

Ein überraschend heftiges Echo in vielen Zeitungen wurde durch einen Artikel von M. von Savant über das folgende Ziegen-Auto-Problem ausgelöst:

Hinter drei Türen verbergen sich zwei Ziegen (als Nieten) und ein Auto. Ein Kandidat wählt eine Tür, der Spielleiter öffnet eine der anderen beiden Türen, hinter der sich eine Ziege befindet und bietet dem Kandidaten an, seine Wahl abzuändern und statt dessen die verbliebene geschlossene Tür zu wählen. Erhöht er damit seine Chancen (was Savant behauptete) oder spielt dies keine Rolle? Fortsetzung folgt.

Literatur: H. Weyl, Symmetrie, Birkhäuser 1955
S. Singh, Fermats letzter Satz, Hanser, 1990
Aigner, Behrens, Alles Mathematik, Vieweg 2000
U. Dudley, Mathematik zwischen Wahn und Witz, Birkhäuser 1995