Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2002/03

Analysis I

– Klausur 1 –

Mittwoch, 18.12.2002, 16.15-18.45 Uhr, Auditorium maximum (HG 215)

Name ______________________________

Vorname ______________________________

Wichtig, bitte beachten:

1. Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt. Kennzeichnen Sie dieses jeweils mit Ihrem Namen und der Nummer der Aufgabe.
2. Geben Sie stichpunktartig Begründungen für Ihre Schlüsse und Rechnungen an.
3. Tragen Sie in das Deckblatt deutlich lesbar Ihren Namen ein und markieren Sie in der ersten Zeile der Tabelle die von Ihnen bearbeiteten Aufgaben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
Punkte	3	5	5	5	3	4	5	7	5	42
Erreicht										

Aufgabe 1 (3 Punkte). Zeigen Sie, dass für die Partialsummen A_n von $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2k+1}{k(k+1)}$ gilt

$$A_n = -1 + \frac{(-1)^n}{n+1}$$

und geben Sie die Summe der obigen Reihe an.

Aufgabe 2 (5 Punkte). Sei $a_n := \dfrac{3^n}{n!}$ für $n \in \mathbb{N}$.

a) Begründen Sie, dass die Folge (a_n) eine Nullfolge ist.

b) Untersuchen Sie, ob Supremum, Infimum, Maximum und Minimum der Menge

$$M := \{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

existieren, und geben Sie diese gegebenenfalls an.

Aufgabe 3 (5 Punkte). Sei $a_0 \in \left]0,2\right]$ und induktiv $a_{n+1}^2 = 2a_n$ mit $a_{n+1} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Begründen Sie, dass damit eine Folge (a_n) definiert ist. Zeigen Sie, dass $a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist und dass die Folge (a_n) konvergiert.
Bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 4 (5 Punkte). Für $n \in \mathbb{N}^*$ sei

$$a_n \;:=\; \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^k .$$

Zeigen Sie, dass dadurch eine beschränkte Folge (a_n) reeller Zahlen definiert ist.
Ist (a_n) eine Nullfolge?

Aufgabe 5 (3 Punkte). Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen, so dass $g \circ f$ surjektiv ist.

a) Zeigen Sie, dass g surjektiv ist.

b) Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass f nicht surjektiv sein muss.

Aufgabe 6 (4 Punkte). Sei $p \in \mathbb{N},\;\; p \geq 2$. Zeigen Sie

$$M \;:=\; \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k\, p^{-k} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \;\text{ und }\; a_k \in \{0, \ldots, p-1\} \right\}$$

ist abzählbar.

Aufgabe 7 (5 Punkte). Für $k = 0, 1, 2$ sei

$$f_k :\; \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^k}{|x|} .$$

Für welche $k \in \{0, 1, 2\}$ existiert $\lim\limits_{x \to 0} f_k(x)$ in $\overline{\mathbb{R}}$? Geben Sie ggf. den Grenzwert an.

Aufgabe 8 (7 Punkte). Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^k}{\sqrt{k} \cdot 2^k}$ für $x \in [-2, 2]$.

b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(k!)^2}{(2k)!}$.

Aufgabe 9 (5 Punkte).

a) Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und $(c_k)_{k \geq 0}$ eine konvergente Folge. Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (c_k \cdot a_k)$ absolut konvergiert.

b) Geben Sie ein Beispiel für eine konvergente Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und eine konvergente Folge $(c_k)_{k \geq 0}$ an, so dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (c_k \cdot a_k)$ divergiert.