Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2002/03

Analysis I

– Klausur 2 –

Samstag, 8.2.2003, 10.15-12.45 Uhr, Hörsäle A und B, Chemie

Name ________________________________

Vorname ________________________________

Wichtig, bitte beachten:

1. Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt. Kennzeichnen Sie dieses jeweils mit Ihrem Namen und der Nummer der Aufgabe.
2. Geben Sie stichpunktartig Begründungen für Ihre Schlüsse und Rechnungen an.
3. Tragen Sie in das Deckblatt deutlich lesbar Ihren Namen ein und markieren Sie in der ersten Zeile der Tabelle die von Ihnen bearbeiteten Aufgaben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
Punkte	3	4	3	6	4	4	4	3	5	36
Erreicht										

Aufgabe 1 (3 Punkte). Zeigen Sie, dass ein $x \in \,]-1,0[$ existiert mit

$$e^{-x} \ln \sqrt{1+x} - \frac{1}{x} = \pi.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Es sei $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2\, e^x$. Zeigen Sie:

a) f besitzt eine stetige Umkehrfunktion $f^{-1} : [0,\infty[\to \mathbb{R}$.

b) Für $y > 0$ ist f^{-1} differenzierbar in y und es gilt

$$(f^{-1})'(y) \;=\; \frac{1}{\left(\frac{2}{f^{-1}(y)} + 1\right) y}\,.$$

Aufgabe 3 (3 Punkte). Zeigen Sie: Ist $f \in C^1([a,b])$, so ist f Lipschitzstetig, d.h. es existiert ein $L > 0$ mit

$$|f(x) - f(y) \leq L|x-y| \quad \forall\, x, y \in [a,b].$$

Aufgabe 4 (6 Punkte). Sei $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.

Bestimmen Sie die Intervalle, in denen f streng monoton wächst oder fällt, konvex oder konkav ist sowie die lokalen Extrema von f und die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Skizzieren Sie den Graph von f.

Aufgabe 5 (4 Punkte). Zeigen Sie, dass die folgenden Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese.

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x} \qquad\qquad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x - \frac{x}{2}^2}{x^3}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte). Untersuchen Sie die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

a) $f_n : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{x}{n^2}\, e^{-\frac{x}{n}}$.

b) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{1}{1+n|x|}$.

Aufgabe 7 (4 Punkte). Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $f :]0, \infty[\ \to\ \mathbb{R}, \quad x \to x^\alpha$ und $a > 0$. Geben Sie die Taylorreihe von f um a an, und zeigen Sie, dass diese in einer Umgebung von a gegen f konvergiert.

Aufgabe 8 (3 Punkte). Zeigen Sie, dass

$$f :]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x}{1-4x^2}$$

durch eine Potenzreihe dargestellt wird und geben Sie diese an.

Aufgabe 9 (5 Punkte). Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos k\, x}{k^3}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert und dass

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\, x}{k^3}$$

differenzierbar ist.