Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2002/03

Analysis I

– Nachklausur –

Donnerstag, 10.4.2003, 9.15-11.45 Uhr, Hörsäle A und B, Chemie

Name ______________________________

Vorname ______________________________

Wichtig, bitte beachten:

1. Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt. Kennzeichnen Sie dieses jeweils mit Ihrem Namen und der Nummer der Aufgabe.
2. Geben Sie stichpunktartig Begründungen für Ihre Schlüsse und Rechnungen an.
3. Tragen Sie in das Deckblatt deutlich lesbar Ihren Namen ein und markieren Sie in der ersten Zeile der Tabelle die von Ihnen bearbeiteten Aufgaben.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
Punkte	4	4	6	4	5	4	6	4	3	40
Erreicht										

Aufgabe 1 (4 Punkte). Zeigen Sie, dass die Iterationsfolge

$$x_{n+1} := \sqrt[3]{x_n}, \qquad x_0 > 1,$$

konvergiert, und berechnen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Für eine nichtleere Menge $M \subset \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ sei wie gewöhnlich $c + M = \{c + x : x \in M\}$. Zeigen Sie

$$\sup M \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sup(c + M) \in \mathbb{R}.$$

Wie hängt $\sup(c + M)$ mit $\sup M$ zusammen?

Aufgabe 3 (6 Punkte). Zeigen Sie für die Funktion

$$f : [0, \infty[\, \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^{x^2+2x} & x > 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} :$$

a) f ist stetig.

b) Es exisitiert ein $a \in \,]0,1[$ mit $f([0,\infty[) = [a,\infty[$.

Aufgabe 4 (4 Punkte).

a) Zeigen Sie Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{3^k + 2k^2 + 1}.$$

b) Finden Sie (mit Mitteln der Differentialrechnung) eine geeignete Abschätzung für

$$a_k := \ln(k^2+1) - \ln(k^2)$$

und folgern Sie die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Aufgabe 5 (5 Punkte). Zeigen Sie: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + \sin x$ hat eine stetige Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ist f^{-1} in allen Punkten differenzierbar? (Betrachten Sie dazu $f \circ f^{-1}$.)

Aufgabe 6 (4 Punkte). Geben Sie Begründungen für die Existenz folgender Grenzwerte und berechnen Sie

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\Big)$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\int_0^x e^t \sin t dt}{x^2}$.

Aufgabe 7 (6 Punkte). Für $n \in \mathbb{N}^*$ sei

$$f_n : [0,\infty[\,\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{n\sqrt{x}}{1+n^a x}.$$

Für welche $a > 1$ konvergiert die Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig?

Aufgabe 8 (4 Punkte). Geben Sie eine Potenzreihenentwicklung der Funktion

$$f : \,]-\infty, 1[\, \to \mathbb{R}, x \mapsto x\ln(1-x),$$

um Null und untersuchen Sie Konvergenzradius und Konvergenz in den Randpunkten.

Aufgabe 9 (3 Punkte). Berechnen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ das Integral

$$\int_a^b x^2 \sin x \, dx$$

und bestimmen Sie den Wert des Integrals für $a = -b$.