Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2003

Übungen zur Analysis II

– Blatt 0 –

Abgabe Dienstag, 22.4.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (mündlich). Sei

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}.$$

a) Bestimmen Sie alle stetigen Funktionen $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, die auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ differenzierbar sind und für die $F'(x)=f(x)$ gilt für alle $x\neq 0$.

b) Hat f eine Stammfunktion?

Aufgabe 2 (7 Punkte). Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^n dx\,,\quad \int_0^1 x(1-x^2)^n dx,\quad n\in\mathbb{N}_0$

b) $\displaystyle\int_e^5 \frac{1}{x\,\ln\,x}\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^x e^{at}\cos bt\;dt;\quad x\in\mathbb{R},\quad a\neq 0,\quad b\neq 0$

d) $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\frac{1+\exp(x)}{1-\exp(x)}\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^{-4}\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$ (Subst. $x=t+c$, c passend)

f) $\displaystyle\int_1^4 \cos(\ln\,x)\,dx$

Aufgabe 3 (4 Punkte, 3 Zusatzpunkte). Für $n\in\mathbb{N}$ sei

$$g_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto(x^2-1)^n \qquad \text{und} \qquad P_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\frac{1}{2^n n!}\;g_n^{(n)}(x).$$

a) Zeigen Sie (durch partielle Integration):

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)\;P_m(x)\,dx \;=\;\begin{cases}0\,, & \text{für}\;\; n\neq m\\ c_n>0 & \text{für}\;\; n=m\end{cases}$$

b) ($*$) Zeigen Sie genauer

$$c_n=\frac{2}{2n+1}.$$

Aufgabe 4 (3 Punkte). Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\int_1^{e^x}\frac{\sin t}{t}\;dt.$$

b/w

Ziege oder Auto, zum zweiten

Die Person, die mit einem Artikel in der US-Zeitschrift Parade 1991 das Ziege-Auto-Problem in die Öffentlichkeit brachte, hatte ein dreifaches Handicap:

- weiblich (mit vollem Namen Marilyn vos Savant)
- intelligent (der höchste je gemessene IQ, 228 Punkte)
- fachfremd (Journalistin)

Ihre Behauptung, dass es günstiger sei, die Tür zu wechseln, nachdem der Spielleiter eine (Ziegen)-Tür geöffnet hatte, stieß auf ein heftiges und fast durchweg negatives Echo, nach Veröffentlichung u.a. in Zeit und Spiegel[1] auch in Deutschland. Viele Zuschriften kamen von ausgewiesenen Fachleuten der Wahrscheinlichkeitstheorie, bei fast allen mit der Quintessenz:

Es bleiben zwei Türen, eine Ziegen- und eine Auto-Tür, die Chancen stehen also halbe-halbe.

Ein Mathematiker schrieb: *"Das haben Sie leider verpatzt! Lassen Sie es mich erklären: Ist eine der Türen als Niete erwiesen, dann ändert diese Information die Wahrscheinlichkeit für jede der beiden verbleibenden Wahlmöglichkeiten – von denen keine einen Grund hat, wahrscheinlicher als die andere zu sein – zu 1/2. Als Berufsmathematiker bin ich über den Mangel an mathematischen Fertigkeiten in der Bevölkerung besorgt. Bitte helfen Sie mit, indem Sie Ihren Fehler eingestehen und in der Zukunft etwas vorsichtiger sind."*

Nicht alle Fachleute äußerten sich so höflich:

"Es gibt schon genug mathematische Unwissenheit in diesem Lande, wir brauchen nicht den höchsten IQ der Welt, um diese Unwissenheit zu vertiefen. Schämen Sie sich!"

"Es gibt schon genug mathematische Unwissenheit in diesem Lande, wir brauchen nicht den höchsten IQ der Welt, um diese Unwissenheit zu vertiefen. Schämen Sie sich!"

[1] Die Zeit vom 19.7.1991, Spiegel vom 19.8.1991

"Vielleicht haben Frauen eine andere Sicht mathematischer Probleme als Männer."

Manche Wissenschaftler bezeichneten Frau Savant "selbst als Ziege", "Auslöser erheblicher Lachsalven in der gesamten mathematischen Fakultät" oder schlicht als "dumme Törin".

Die vielen Fachleute befanden sich nicht unbedingt im Ton, jedoch in der Sache in allerbester Gesellschaft. Paul Erdös, einer der prominentesten Mathematiker des letzten Jahrhunderts und eine Autorität in Wahrscheinlichkeitstheorie, konnte sich nicht mit der Wechseltheorie anfreunden, seine spontane Reaktion war "nein, das ist unmöglich, das kann keinen Unterschied machen". Auch die weiteren Erklärungsversuche seines Kollegen Vazsonyi hatten wenig Erfolg. In dem Buch von Schechter[2] über Erdös ist die Szene so beschrieben:

Vazsonyi erklärte all dies in der Sprache der Mathematik, aber es gelang ihm nicht, Erdös zu überzeugen; dieser begann vielmehr wie die Verfasser der Briefe an vos Savant, sich aufzuregen. "An diesem Punkt angekommen, bedauerte ich es, dass ich das Problem erwähnt hatte", erinnerte sich Vazsonyi. Schließlich stürmte Erdös davon, frustriert von Vazsonyis Erklärungen. Eine Stunde später kehrte er zurück und schrie Vazsonyi an: "Du erklärst mir überhaupt nicht, warum man wechseln soll! Was ist los mit dir?"

Weder Intuition noch profunde Kenntnisse in Wahrscheinlichkeitstheorie scheinen für die Lösung des Problems hilfreich zu sein, die folgende Erklärung hat aber dann doch die meisten Kritiker von M. Savant zum (beschämten) Schweigen gebracht:

Man stelle sich vor, dass zwei Spieler A und B gleichzeitig antreten, A wechselt nie, B immer, der Einfachheit halber beginnen beide mit der gleichen Tür. Einer von beiden gewinnt dann immer, die Chancen von A stehen genau bei 1/3, die von B also bei 2/3, das Auto zu gewinnen.

[2] B. Schechter, Mein Geist ist offen: die mathematischen Reisen des Paul Erdös, Birkhäuser 1999.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2003

Übungen zur Analysis II

– Blatt 1 –

Abgabe Dienstag, 29.4.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 5 (5 Punkte). Sei $f \in C^1([a,b])$ mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$.

a) Zeigen Sie, dass für die Umkehrfunktion f^{-1} gilt

$$(1) \qquad \int_a^b f + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1} \;=\; bf(b) - af(a)\ .$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion

$$F : [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_a^x f + \int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1} \;-\; \big(xf(x) - af(a)\big).$$

b) Was bedeutet die Aussage (1) geometrisch?

c) Berechnen Sie mittels (1) erneut eine Stammfunktion des natürlichen Logarithmus.

Aufgabe 6 (4 Punkte). Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale. – Dazu gehört die Begründung der Konvergenz.

a) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\, dx$ b) $\displaystyle\int_0^\infty x^5 e^{-2x}\, dx$ c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x \cdot e^{-x^2}\, dx$

Aufgabe 7 (mündlich). Auf $C([0,1])$ sei die Supremumsnorm sowie die Norm

$$f \mapsto \|f\|_1 := \int_0^1 |f|$$

gegeben. Untersuchen Sie, ob es $c > 0$ bzw. $d > 0$ gibt, so dass für alle $f \in C([0,1])$ gilt

$$\|f\|_1 \le c\,\|f\|_\infty \qquad \text{bzw.} \qquad \|f\|_\infty \le d\,\|f\|_1\ .$$

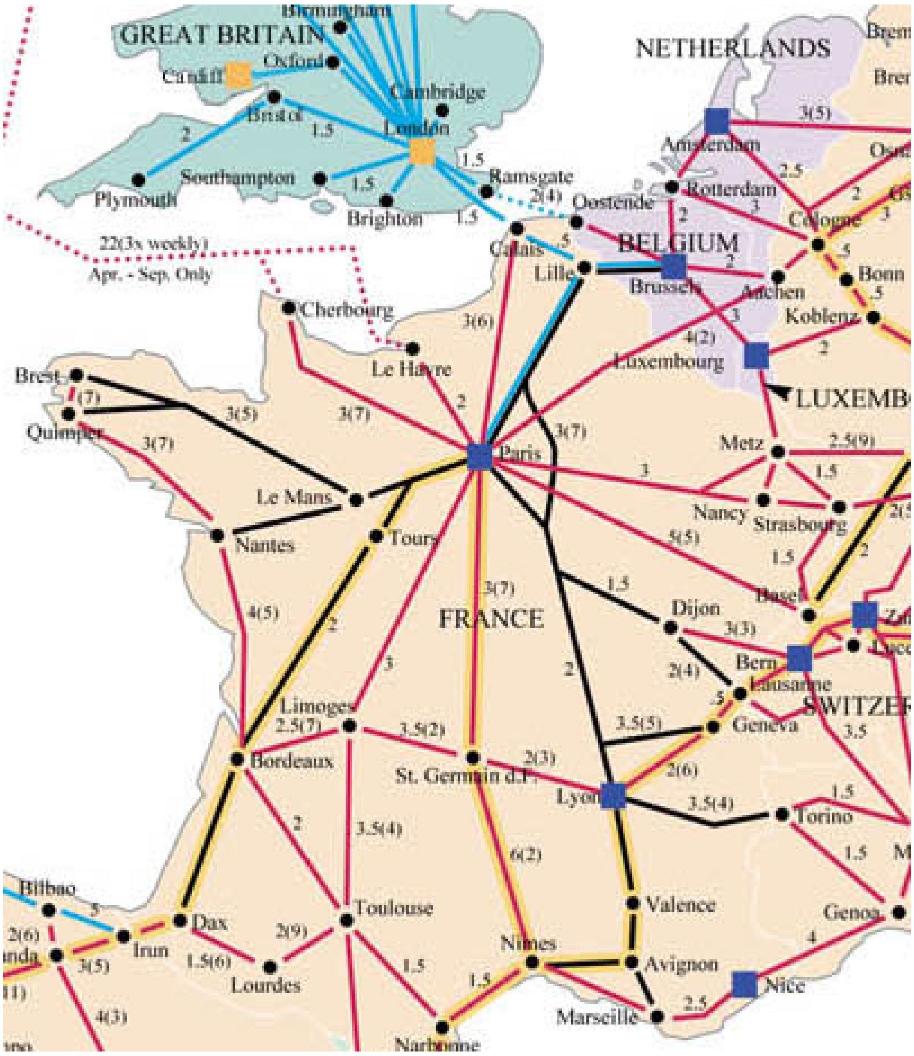
Aufgabe 8 (3 Punkte). Zeigen Sie, dass durch

$$d(x,y) := \begin{cases} \|x-y\|_2 & x, y \text{ linear abhängig} \\ \|\,.\,\|\, x_2 + \|\,.\,\|\, y_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Metrik d auf $\mathbb{R}^2$ definiert wird, die sogenannte *French Railroad-Metrik* oder *SNCF-Metrik*. Woher kommt der Name?

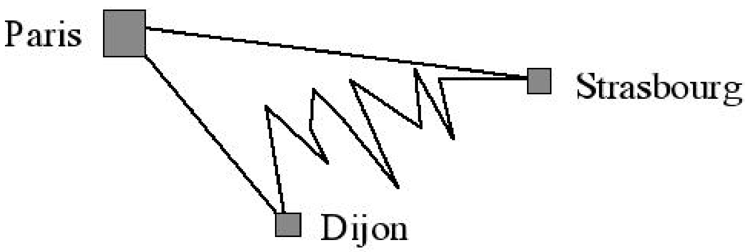
b/w

Ein grober Streckennetzplan europäischer Eisenbahnen



Anscheinend wollen manche englischen Mathematiker diese Metrik auf ihre Nationalität reserviert wissen, was anhand des obigen Ausschnittes noch einleuchtend scheint.

Inzwischen ist tatsächlich die direkte Verbindung zwischen Dijon und Strasbourg schneller. Aber in früheren Zeiten waren die Strecken nicht so gut ausgebaut.



Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2003

Übungen zur Analysis II

– Blatt 2 –

Abgabe Dienstag, 6.5.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 9 (mündlich). Konstruieren Sie eine Folge $(x(k))_{k\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^2$, die bzgl. der euklidischen Norm $\|\,\boldsymbol{.}\,\|_2$ auf $\mathbb{R}^2$ konvergiert, aber bzgl. der French Railroad-Metrik aus Aufgabe 8 divergiert.

Aufgabe 10 (4 Punkte). Sei (X,d) ein metrischer Raum, $M \subset X$ offen oder abgeschlossen. Zeigen Sie, dass der innere $(\partial M)^\circ$ des Randes von M leer ist.

Gilt dies auch für eine beliebige Menge M?

Aufgabe 11 (3 Punkte). Sei d die diskrete Metrik auf einer Menge X.

a) Geben Sie für eine beliebige Menge $M \subset X$ die Mengen $\overline{M}, \overset{\circ}{M}$ und ∂M an.

b) Gilt das Resultat aus Beispiel 9.12:

$$\partial(U_\varepsilon(a)) = \left\{x \in X \;\middle|\; d(x,y) = \varepsilon\right\} \quad \forall\, \varepsilon > 0,\ \ a \in X\ ?$$

Aufgabe 12 (6 Punkte).

a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{Graph}(f) = \left\{(x,\ f(x)) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in I\right\}$$

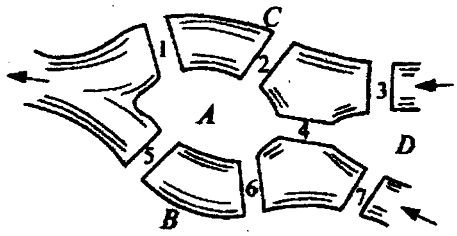
in $\mathbb{R}^2$ abgeschlossen ist.

b) Bestimmen Sie den Abschluss von

$$M := \left\{\left(x,\ \sin\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x > 0\right\}.$$

Als ältestes topologisches Problem gilt das **Königsberger Brückenproblem**: Über den Pregel führten (im 18. Jahrhundert) 7 Brücken. Ist es möglich, sie alle nacheinander zu überschreiten, ohne über eine mehr als einmal zu gehen? Hängt die Lösung von dem Ausgangspunkt ab?

Das Problem wurde von Leonhard E. gelöst. Folgen Sie seinem (Lösungs-)Weg.



Organisatorisches

Übungsblätter, Hinweise und Bedingungen finden sich auf der Vorlesungsseite des Fachbereichs:

"www.mathematik.uni-marburg.de/∼eckert/2003SS/"

Die Tutorien der ausfallenden Donnerstage (1.5., 29.5. und 19.6) werden ersetzt durch jeweils einen Ausweichtermin am vorangehenden Mittwoch, 16–18 Uhr, HG 109, sowie Freitag, 14–16 Uhr, HS V. Zusätzlich können die beiden regulären Tutorien mittwochs 16–18 Uhr besucht werden in SR I und SR X.

Scheinkriterien

- Regelmäßige Teilnahme am Tutorium, Hälfte der Soll-Punkte der schriftlichen Übungsaufgaben. (Mit Stern gekennzeichnete Aufgaben gehören zum Haben aber nicht zum Soll.)
- Vorbereiten von 1/3 der mündlichen Aufgaben.
- Bestehen der Klausur oder der Nachklausur.

Die Klausur fließt in die Note des Scheins zu 2/3 ein, 1/3 ergibt sich aus den Übungsblättern und der Mitarbeit im Tutorium.

Klausuren

Klausur Samstag, 19.7.2003, 11–14 Uhr, 11-14 Uhr, HS A+B (Chemie),
Nachschreibklausur Donnerstag, 9.10.2003, 9-12 Uhr, HS B (Chemie).

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2003

Übungen zur Analysis II

– Blatt 3 –

Abgabe Dienstag, 13.5.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 13 (3 Punkte). Zeigen Sie, dass die Räume $(C([a,b]), \|\,\boldsymbol{.}\,\|_p)$ aus Beispiel 9.5 für $a < b$ (z.B. $a = 0$, $b = 2$) und $p \in [1, \infty[$ unvollständig sind.

Aufgabe 14 (mündlich). Es seien X ein metrischer Raum und $A, B \subset X$ kompakt. Zeigen Sie: $A \cup B$ ist kompakt.

Aufgabe 15 (4 Punkte). Auf $C([0,1])$ sei die Supremumsnorm $\|\,\boldsymbol{.}\,\|_\infty$ gegeben. Zeigen Sie:

a) Es existiert eine Folge $(f_k) \subset C([0,1])$ mit

$$\|f_k\|_\infty = 1 \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad \|f_k - f_j\|_\infty = 1 \text{ für alle } k \neq j.$$

b) Die Menge

$$S := \big\{ f \in C([0,1]) \;\big|\; \|\,\boldsymbol{.}\,\| f_\infty = 1 \big\}$$

ist nicht kompakt (obwohl sie abgeschlossen und beschränkt ist).

Aufgabe 16 (5 Punkte). Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(0,0) := 0$ und

$$f(x,y) := \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \qquad \text{für} \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

a) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit.

b) Zeigen Sie, dass für alle $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ die Grenzwerte

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \Big(\lim_{\substack{y \to b \\ y \neq b}} f(x,y) \Big) \qquad \text{und} \qquad \lim_{\substack{y \to b \\ y \neq b}} \Big(\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x,y) \Big)$$

existieren. Für welche $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ stimmen die Grenzwerte überein?

c) Skizzieren Sie die Höhenlinien

$$\big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; f(x,y) = a \big\}$$

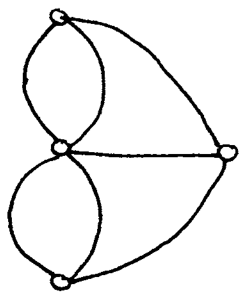
von f für einige $a \in \mathbb{R}$.

Das Königsberger Brückenproblem in schematischer Darstellung führt auf ein **Graphenproblem**: Stellt man die Stadtteile A, B, C, D als Punkte, die Brücken dazwischen als Verbindungslinien dar, so entsteht der Graph a).

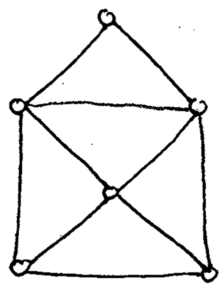
Ein Graph, d.h. eine endliche Menge M, den "Knoten", zusammen mit einer Familie K aus $M \times M$, den "Kanten", heißt ein Euler-Graph, wenn er in einem geschlossenen Weg durchlaufen werden kann, so dass jede Kante genau einmal passiert wird. Verzichtet man auf die Forderung "geschlossen", so nennt man den Graphen Semi-Euler-Graph. Ein bekanntes Beispiel dazu ist das "Haus vom Nikolaus" in b).

Der Graph in a) ist kein Euler-Graph, was elementar zu begründen ist, es folgt auch aus folgendem allgemeinen

Satz. *Ein zusammenhängender Graph ist genau dann ein (Semi-)Euler-Graph, wenn die Anzahl der Kanten in jedem Knoten (mit Ausnahme von höchstens zwei Knoten) gerade ist.*



a)



b)

Literatur. R.J. Wilson, Introduction to Graph Theory, Theorem 6B, Corollary 6D.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2003

Übungen zur Analysis II

– Blatt 4 –

Abgabe Dienstag, 20.5.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 17 (4 Punkte). Welche der folgenden Mengen $A_j \subset \mathbb{R}^2$ sind kompakt?

$$\begin{aligned} A_1 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (1+x^2)\, e^{y^2} \le 2\right\}. \\ A_2 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y^2 = x^3\right\}. \\ A_3 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x^2)^{1/3} + (y^2)^{1/3} < 4\right\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 18 (mündlich). Sei $\|\,\boldsymbol{.}\,\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$. Ist

$$B := \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|x\| \le 1\right\}$$

kompakt in $(\mathbb{R}^n, \|\,\boldsymbol{.}\,\|_2)$?

Aufgabe 19 (4 Punkte). Es seien $h, k \in C([a,b])$ mit $q := (b-a)\,\|h\|_\infty\,\|k\|_\infty < 1$. Zeigen Sie, dass die Integralgleichung

$$g(x) = f(x) - h(x) \int_a^b k(y)\, f(y)\, dy, \quad x \in [a,b]\,,$$

für jedes $g \in C([a,b])$ genau eine Lösung $f \in C([a,b])$ besitzt.
Geben Sie eine "Lösungsformel" an.

Aufgabe 20 (5 Punkte). Es seien $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit $K \subset G$ und $\delta := d(K,\ \mathbb{R}^n \setminus G)$. Zeigen Sie:

a) $K_1 := \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; d(x,K) \le \delta/2\right\}$ ist kompakt und $K_1 \subset G$.

b) Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{d(x, \mathbb{R}^n \setminus K_1)}{d(x,K) + d(x, \mathbb{R}^n \setminus K_1)}\,,$$

ist wohldefiniert und stetig mit:

$$f|_K = 1, \quad f|_{\mathbb{R}^n \setminus K_1} = 0\,.$$

c) Skizzieren Sie für $n = 1$, $K = [-1,1]$, $G = \,]-2,2[$ den Graphen von f.

b/w

Weierstraß

ÜBER DIE ANALYTISCHE DARSTELLBARKEIT SOGENANNTER WILLKÜRLICHER FUNCTIONEN REELLER ARGUMENTE.

(Aus dem Sitzungsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 9. und 30. Juli 1885.)

1.

Das Hauptergebniss der nachstehenden Untersuchung lässt sich, wenn man sich zunächst auf Functionen einer Veränderlichen beschränkt, folgendermaassen aussprechen:

Es sei x eine reelle Veränderliche, welche jeden dem Intervall $(-\infty \cdots +\infty)$ angehörigen Werth annehmen kann, ferner bedeute $f(x)$ eine reelle und durchweg continuirliche Function von x, so lässt sich stets auf mannigfaltige Weise eine Reihe von ganzen Functionen $f_1(x), f_2(x), \ldots$ der Art bilden, dass für jeden der betrachteten Werthe von x

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots$$

ist. Dabei ist die Reihe $f_1(x) + f_2(x) + \cdots$ in jedem endlichen Intervalle gleichmässig convergent.

Es gilt also das Theorem:

Jede Function $f(x_1, \ldots x_n)$ von der angegebenen Beschaffenheit lässt sich auf mannigfaltige Weise in der Form einer unendlichen Reihe darstellen, deren Glieder ganze rationale Functionen von $x_1, \ldots x_n$ sind; diese Reihe convergirt unbedingt für jedes endliche, in dem Bereiche S gelegene Werthsystem $(x_1, \ldots x_n)$ und gleichmässig für jeden ganz im Endlichen liegenden abgeschlossenen Theil von S.

Bitte die **Übungsscheine und Klausuren zur Analysis I** im Sekretariat von Frau Teubner, Zimmer 8709, Ebene A8 abholen!

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes Sommersemester 2003

Übungen zur Analysis II
– Blatt 5 –
Abgabe Dienstag, 27.5.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 21 (mündlich). Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ($f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$). Zeigen Sie: Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\|f' - p'\|_\infty \ < \ \frac{\varepsilon}{b-a}\,.$$

p ist außerdem so wählbar, dass auch $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$ gilt.

Aufgabe 22 (5 Punkte). Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ stetig und 2π-periodisch, d.h. $f(t+2\pi) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und sei $g := f \circ \arg : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{K}$, also $g(e^{it}) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (vgl. Satz 7.34). Zeigen Sie:

a) g ist (folgen-) stetig in $z = 1 \in \mathbb{S}^1$ (und damit auf $\mathbb{S}^1$).

b) Zu $\varepsilon > 0$ existieren $N \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{C}$ mit

$$(1) \qquad \Big| f(t) - \sum_{k=-N}^{N} c_k\, e^{ikt} \Big| \ < \ \varepsilon \qquad \text{für alle} \quad t \in [0, 2\pi[\ .$$

c) Die Approximation (1) gilt sogar für alle $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 23 (3 Punkte). Sei $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und

$$H = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \ \Big|\ \langle x \,|\, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j = 0 \Big\}$$

die dazu orthogonale Hyperebene. Zeigen Sie: $\mathbb{R}^n \setminus H$ hat genau zwei Zusammenhangskomponenten.

Aufgabe 24 (4 Punkte). Es sei

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{cases} e^t \cos(2\pi t) \\ e^t \sin(2\pi t) \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Kurve φ im Bereich $-1 \le t \le 1$.

b) Für $a < b$ sei $L_{a,b}$ die Bogenlänge der Kurve $\varphi|_{[a,b]}$. Berechnen Sie $L_{a,b}$. Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{a \to -\infty} L_{a,0}$?

Zusatzaufgabe (6 Punkte). Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und 2-periodisch mit

$$0 \leq f \leq 1, \quad f|_{[0,\frac{1}{3}]} = 0, \quad f|_{[\frac{2}{3},1]} = 1.$$

Für $t \in \mathbb{R}$ sei

$$x(t) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} f(3^{2k-1}t), \qquad y(t) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} f(3^{2k}t)\,.$$

Zeigen Sie:

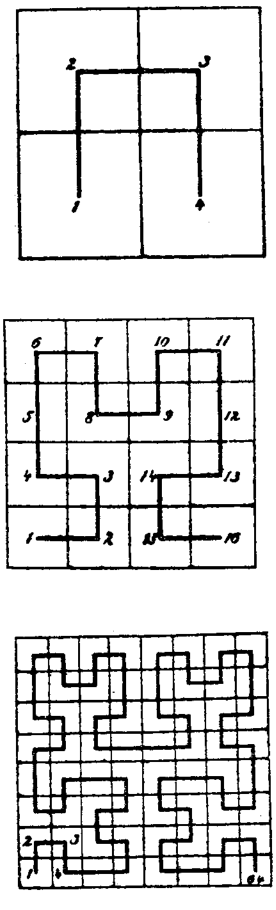
a) Die Kurve

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

ist stetig. Hinweis: $\left| \sum\limits_{k>N} 2^{-k} f(3^{2k-1}t) \right| \leq 2^{-N}$.

b) Ist $(a_k)_{k\geq 1}$ eine Folge in $\{0,1\}$ und $t_0 := \sum\limits_{j=1}^{\infty} 3^{-j-1} \cdot 2a_j$, so gilt $f(3^k t_0) = a_k$.
Hinweis: $t_0 = \sum\limits_{j<k} 3^{-j-1}\, 2a_j + 3^{-k-1}\, 2a_k + \sum\limits_{j>k} 3^{-j-1} 2a_j$.

c) Mit $x_0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\, a_{2k-1}$, $\;y_0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k} a_{2k}$ ist $\varphi(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.
Folgern Sie: $\varphi([0,1]) = [0,1]^2$.



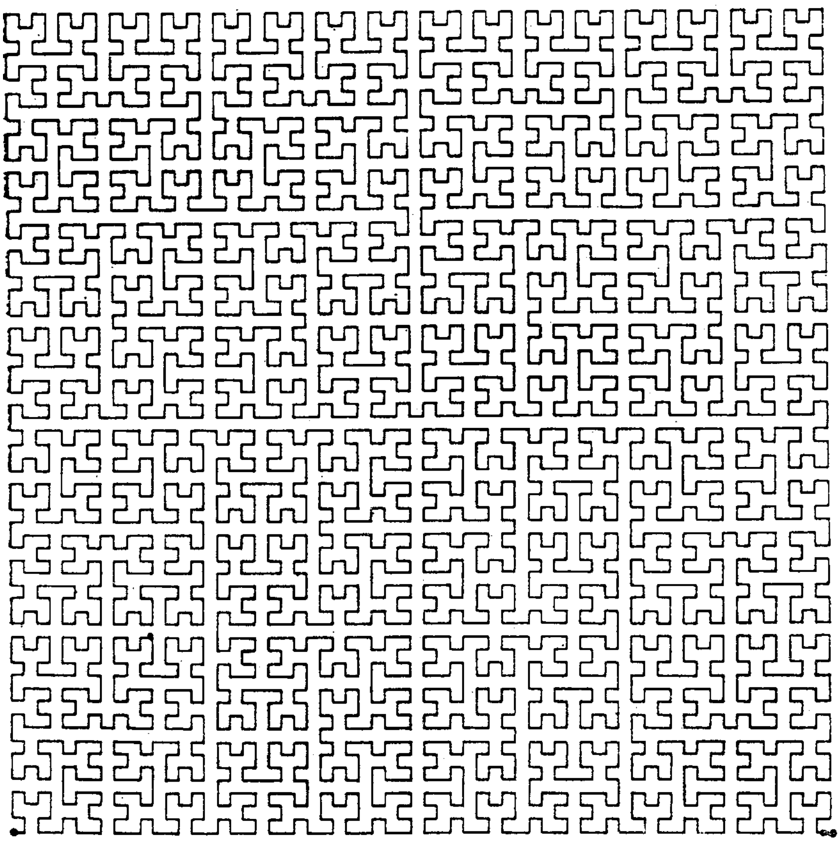


Fig. 2.1.2. Sixth Step in the Generation of the Hilbert Curve

Aus: Hans Sagan, Space-Filling Curves, Springer 1994.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2003

Übungen zur Analysis II

– Blatt 6 –

Abgabe Dienstag, 3.6.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 25 (4 Punkte). Gegeben sei die logarithmische Spirale

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 , \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} e^t \cos 2\pi\, t \\ e^t \sin 2\pi\, t \end{pmatrix}$$

a) Auf welcher einfachen Kurve liegen alle Punkte $\varphi(t)$ mit $\varphi_2'(t) = 0$?

b) Geben Sie eine Parametertransformation p an, so dass $\varphi \circ p$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Aufgabe 26 (5 Punkte). Sei $(X, \| \, \|)$ ein normierter Raum, $G \subset X$ offen und $\varphi : [a, b] \to X$ ein Weg in G. Zeigen Sie:

a) Es ist $d(\varphi([a, b]),\ X \setminus G) =: \varepsilon > 0$.

b) Es existiert eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ von $[a, b]$ mit

$$\|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\| \ < \ \varepsilon \ \text{ für } \ k = 1, \ldots , N.$$

c) Der Polygonzug $\bigcup\limits_{k=1}^{N} [\varphi(t_{k-1}),\ \varphi(t_k)]$ liegt in G.

Aufgabe 27 (3 Punkte). Sei $(X, \| \, \|)$ normierter Raum, $G \subset X$ offen und wegzusammenhängend, $f : G \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $Df(x) = 0$ für alle $x \in G$.
Zeigen Sie (mit der Kettenregel), dass f konstant ist.

Aufgabe 28 (mündlich). Sei K kompakt, $X := (C(K, \mathbb{R}), \| \, \|_\infty)$. Zeigen Sie:

a) $F : X \to X,\ \ f \mapsto f^3$ ist differenzierbar.

b) $G := \big\{ f \in X \bigm| f(x) \neq 0 \ \ \forall\, x \in K \big\}$ ist offen in X und

$$F : G \to X, \ \ f \mapsto \frac{1}{f} \qquad \text{ist differenzierbar.}$$

Geben Sie jeweils die Ableitung $DF(f) : X \to X, \ \ h \mapsto DF(f)\, h$ an.

Eine lebenswichtige Kurve

Ein einpunktiger Löwe L und ein ebensolcher Mensch M bewegen sich mit gleicher konstanter Geschwindigkeit v im offenen Einheitskreis $D := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|x\|_2 < 1 \right\}$ der Ebene. Gibt es eine Strategie für M, so dass L M nicht fangen kann (d.h. für alle Zeiten $t \geq t_0$ ist $L(t) \neq M(t),\ \ L(t),\ M(t) \in D$), wobei natürlich $L(t_0) \neq M(t_0)$ vorausgesetzt sei?

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes Sommersemester 2003

Übungen zur Analysis II

– Blatt 7 –

Abgabe Dienstag, 10.6.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 29 (mündlich). Es seien $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(G, \mathbb{R})$, $I \subset \mathbb{R}$ offen und $\varphi \in C^1(I, G)$ eine Höhenlinie, d.h. $f \circ \varphi$ ist konstant. Zeigen Sie, dass in jedem Kurvenpunkt die Richtung der Kurve orthogonal zur Richtung des maximalen Anstiegs von f ist.

Aufgabe 30 (4 Punkte). Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(0,0) := 0$ und

$$f(x,y) := \frac{y^5}{2x^4 + y^4} \quad \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0)\,.$$

Zeigen Sie:

a) f ist stetig und alle Richtungsableitungen von f in $(0,0)$ existieren.

b) Ist

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \binom{t}{t}\,,$$

so erfüllt $f \circ \varphi$ *nicht* die Formel der Kettenregel:

$$(f \circ \varphi)'(0) = \sum_{j=1}^{2} \partial_j\, f(\varphi(0))\ \varphi_j'(0)\,.$$

Aufgabe 31 (4 Punkte). Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$, f habe einen Fixpunkt $c \in G$ mit $\|D\,f(c)\| < 1$.
Zeigen Sie, dass c ein attraktiver Fixpunkt ist, d.h. $\exists\ \varepsilon > 0$, so dass für alle $x_0 \in B_\varepsilon(c)$ die Iterationsfolge (x_k) mit $x_{k+1} := f(x_k)$ definiert ist und $\lim_{k\to\infty} x_k = c$ gilt.
Hinweis: Wähle $q \in [0, 1[$ und $\varepsilon > 0$ mit

$$\|Df(x)\| \leq q \qquad \forall\ x \in B_\varepsilon(c)\,.$$

Aufgabe 32 (5 Punkte).

a) Zeigen Sie: Die Funktion

$$F : \,]0, \infty[\, \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (t,x) \to t^{-n/2}\, exp\Big(-\frac{\|x\|^2}{4t}\Big)\,,$$

ist eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\Delta_x\, F - \partial_t\, F = 0.$$

b) Es seien $c > 0$, $a \in \mathbb{R}^n$ mit $\|a\| = 1$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f \in C^2(\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (t,x) \to f\big(\langle a\,|\,x\rangle - ct\big)$$

ist eine Lösung der Schwingungsgleichung

$$\Delta_x\, F - \frac{1}{c^2}\ \partial_t^2\, F = 0\,.$$

b/w

Der BlaBla-Operator

Mit freundlicher Genehmigung des Autors, Prof. Dr. D. Gromes, allen mathematisch-physikalisch Interessierten wärmstens empfohlen.

Der BlaBla-Operator wird seit alters her in allen Bereichen der Wissenschaft mit größtem Erfolg angewandt; erst im letzten Drittel des 20. Jahrhunderts wurde er vom Verfasser auf eine exakte mathematische Grundlage gestellt. Wegen seiner fundamentalen Bedeutung sollen seine wichtigsten Eigenschaften hier zusammengestellt werden:

Notation. Das Symbol für den BlaBla-Operator ist die stilisierte Sprechblase "🗨".

Definitionsbereich. Der BlaBla-Operator wirkt im gesamten Phrasenraum, er ist nach oben unbeschränkt.

Lorentzinvarianz. Der BlaBla-Operator kommutiert mit allen Generatoren der Lorentzgruppe:

$$[P_\mu, \text{🗨}] = 0, \ \ [M_{\mu,\nu}, \text{🗨}] = 0.$$

Er ist daher in jedem Koordinatensystem anwendbar.

Opportunität. Sei A eine Aussage und $\neg A$ deren Negation. Dann kann man durch Anwendung von 🗨 sowohl A als auch $\neg A$ beweisen, in Formeln:

$$\text{🗨} = \neg\text{🗨}.$$

Iteration. Der BlaBla-Operator kann beliebig oft hintereinander angewandt werden, verliert dabei allerdings zunehmend an Wirkung; exakt formuliert:

$$\lim_{n\to\infty} (\text{🗨})^n = 0$$

(im Sinne der starken Konvergenz im Phrasenraum).

Spektralsatz. Die Eigenwerte des BlaBla-Operators bestehen aus den zur jeweiligen Zeit vorliegenden experimentellen Daten sowie einem Kontinuum von Vorhersagen.

Dieses sind die wichtigsten Eigenschaften, die für die meisten Anwendungen völlig ausreichen. Um mit dem BlaBla-Operator besser vertraut zu werden, sei die Bearbeitung der folgenden Übungsaufgaben empfohlen:

a) Man berechne den BlaBla-Operator in Polarkoordinaten und leite daraus alle wichtigen Eigenschaften der Kugelfunktion ab.

b) Man beweise die Gleichung $\text{🗨} = 1/\text{🗨}$. Was bedeutet sie physikalisch?

c) In der Vorlesung war der BlaBla-Operator ausführlich auf das Wasserstoffatom angewandt worden. Man zeige, dass er im Limes $\hbar \to 0$ in den BlaBla-Operator der klassischen Mechanik übergeht, und löse damit das Keplerproblem.

Abgabe: Ein beliebiger Punkt des Raum-Zeit-Kontinuums.

Die Punkte werden nur mündlich vergeben. Zur Klärung der Punktzahl wird in Zweifelsfällen der BlaBla-Operator angewandt.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2003

Übungen zur Analysis II

– Blatt 8 –

Abgabe Dienstag, 17.6.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 33 (mündlich). Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \frac{xy^3}{x^2+y^2} \qquad \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) := 0\,.$$

a) Zeigen Sie: f ist zweimal partiell differenzierbar in $\mathbb{R}^2$ und

b) $\partial_1 \partial_2 f(0,0) \neq \partial_2 \partial_1 f(0,0)$.

c) Geben Sie eine partielle Ableitung $\partial_i \partial_j f$ an, die in $(0,0)$ unstetig ist.

d) Ist f stetig in $(0,0)$? Ist f differenzierbar in $(0,0)$?

Aufgabe 34 (4 Punkte). Sei $h \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\;r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\;x \mapsto \|x\|_2$ und

$$f := h \circ r^2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie: f ist rotationssymmetrisch (d.h. es existiert $g : [0,\infty[\; \to \mathbb{R}$ mit $f = g \circ r$), $f \in C^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ und das 2-te Taylorpolynom von f in 0,

$$x \mapsto T_0^2(x) = \sum_{|\alpha|\leq 2} \frac{\partial^\alpha f(0)}{\alpha!}\, x^\alpha \;,$$

ist ebenfalls rotationssymmetrisch.

Aufgabe 35 (4 Punkte). Berechnen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto x^3 + x - 4xy - 2y^2\,.$$

Aufgabe 36 (4 Punkte). Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ homogen vom Grad $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h. $f(tx) = t^\lambda f(x)$ für alle $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

a) Ist $f \in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, so gilt die Euler-Relation

$$Df(x)\,x = \lambda\, f(x) \qquad \forall\; x \in \mathbb{R}^n\,.$$

(Hinweis: Zu $\varphi(t) = f(tx)$ berechne $\varphi'(1)$ auf zwei Weisen.)

b) Ist $\lambda \in \mathbb{N}^*$, $\;f \in C^{\lambda+1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, so ist f ein homogenes Polynom vom Grad λ, d.h.

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=\lambda} c_\alpha\, x^\alpha\,.$$

Die Black-Scholes Formel

Differential-Gleichungen und Operatoren sind seit Newton ein zentrales Instrument zur Beschreibung von Naturvorgängen. Ein überaus populäres Anwendungsbeispiel aus einem anderen Gebiet (mehrere hundert Internetseiten dazu) ist das 1973 von Fischer Black und Myron Scholes vorgeschlagene Modell[3], um im Aktienhandel einen fairen Preis von Optionen zu bestimmen. Dieser wird inzwischen überwiegend aus Lösungen der Black-Scholes-Differentialgleichung

$$r \cdot f \;=\; \partial_t f + r \cdot x \cdot \partial_x f + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_x^2 f$$

berechnet.

Sie gehört zur gleichen Familie wie die des Wärmeoperators, die mathematische Behandlung erfordert jedoch tiefliegende Hilfsmittel.

Die Arbeit von Black und Scholes wurde 1997 mit dem Nobelpreis für Ökonomie belohnt (zu dem hierfür näherliegenden Nobelpreis für Mathematik vgl. Übungsblatt 12, Analysis I).

Robert Merton, Mitempfänger des Preises als dritter Beteiligter bei der Entwicklung, über das neue Modell und seine Auswirkung:

Having been present at the creation, Merton could state with authority that the Black-Scholes model was developed entirely in theory, with "essentially no reference to empirical option pricing data as motivation for its formulation." Yet within two years of the opening of the Chicago Board of Options Exchange, in April 1973,

> *"traders there were using the model to both price and hedge their option positions. It was so widely used that Texas Instruments began selling a hand-held calculator specially programmed to produce Black-Scholes option prices and hedge ratios right in the trading pit. . . . The rapid adoption of the option model was all the more impressive, as the mathematics used in that model were not part of the standard mathematical training of either academic economists or practitioner traders."*

http://www.siam.org/siamnews/09-98/merton.htm

Literatur: http://www.wiwi.uni-frankfurt.de/∼doerner/

[3]Fischer Black and Myron S. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, 637-654, 1973.

Fachbereich Mathematik und Informatik | Sommersemester 2003
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Übungen zur Analysis II
– Blatt 9 –
Abgabe Dienstag, 24.6.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 37 (6 Punkte). Sei $U = U_1(0) = \big\{x \in \mathbb{R}^n \;\big|\; \|x\| < 1\big\}$ und

$$\begin{aligned} \phi : U \times \,]0,\infty[\;&\to\; \mathbb{R}^n \times \,]0,\infty[\;, \\ (x,r) \;&\mapsto\; \big(rx,\; r\sqrt{1-\|x\|^2}\big)\;. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie: ϕ ist eine Koordinatentransformation. Geben Sie die Umkehrabbildung ϕ^{-1} an.

b) Berechnen Sie die Ableitung $\partial\phi\,(x,r)$ und zeigen Sie, dass $\partial\phi\,(x,r)$ für alle $(x,r) \in U \times \,]0,\infty[$ invertierbar ist.

c) Zeigen Sie (z.B. mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz)

$$det\,(\partial\phi\,(x,r)) = \frac{r^n}{\sqrt{1-\|x\|^2}}\;.$$

d) Skizzieren Sie für $n = 1$ zwei Koordinatenlinien $]-1,1[\; \times \{r_0\}$ und $\{x_0\} \times \,]0,\infty[$ und deren Bilder unter ϕ.

Aufgabe 38 (mündlich). Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f \in C^1(G,\mathbb{R}^n)$ und $\partial f(x)$ positiv definit für alle $x \in G$.
Zeigen Sie, dass $f : G \to f(G) =: V$ bijektiv ist und $f^{-1} \in C^1(V,\mathbb{R}^n)$ ist.
(Hinweis: MWS, Satz 12.15, $(*)$.)

Aufgabe 39 (4 Punkte). Zeigen Sie: Es existieren $\varepsilon, \delta > 0$, so dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sin x + y^2 + z &= 0 \\ x^2 + y\,e^z &= 0 \end{aligned}$$

für jedes $x \in \,]-\varepsilon,\varepsilon[$ genau eine Lösung

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} \;\in\; U_\delta\big((0,0)\big)$$

hat und dass die dadurch gegebene Funktion

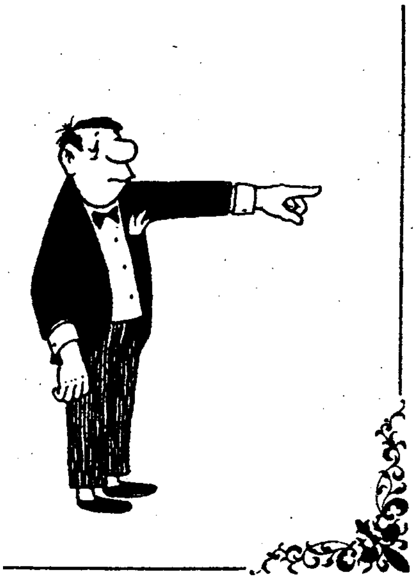
$$]-\varepsilon,\varepsilon[\; \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y(x)\,,$$

differenzierbar ist. Berechnen Sie $y'(x)$.

Zusatzaufgabe 40 (5 Punkte). Die guten Vorsätze der Hörerschaft (vgl. Blätter 9 und 12, Analysis I) haben im Laufe des Semesters zu leichten Erschöpfungszuständen geführt (insbesondere bei L.E.); angeregt durch die Zeitungslektüre (s.u.) und Loriots gesammelte Werke, beschließt man das Tutorium durch eine kleine Wichtelfeier aufzulockern. Dabei findet eine kegelförmige Wichtelwundertüte

$$W = \mathrm{Graph}\,(f), \;\text{ wobei } f(x,y) = 2(1-\sqrt{x^2+y^2}), \;\; x^2+y^2 \le 1,$$

keine Abnehmer, man beschließt diese durch Kreidezielwurf zwischen L.E., C.F.G. und S.K. zu verteilen. Das Kreidestück K_L von L.E. bleibt an einem Stuhlbein hängen, $K_L = (5,3,0)$, das von C.F.G. landet zwischen Einwickelpapier und Übungszetteln auf dem Tisch der Tutorin, $K_C = (3,4,\frac{5}{2})$, und K_S bleibt an der nassen Tafel kleben, $K_S = (1,1,\frac{13}{2})$. Der nachfolgende Streit droht den Arbeitsfrieden zu stören. Wer hilft schlichten (indem er $d_J^2 = \min\big\{\|K_J - P\|^2 \;\big|\; P \in W\big\}$ berechnet für $J \in \{L,C,S\}$)?



20 die tageszeitung mittwoch, 11. juni 2003

jo rau: ja, is' denn scho' weihnachten

IRRTUMFOTO: AP

Durch einen peinlichen Fehler des Bundesprädialamtes hat Johannes Rau zu Pfingsten mit seiner Familie Weihnachten gefeiert. „Da sind wir ja schön reingefallen", erklärte der Bundespräsident gestern in Berlin. Offensichtlich hat ein falsch aufgeschlagenener Kalender zu der Terminverwechslung geführt. „Die Pute war dennoch sehr lecker", meinte Rau. Allerdings habe er sich schon gewundert, dass es im Winter so heiß sei, schmunzelte der Präsident. Seine Frau Christina habe ihm ein tragbares Elektrokabelwarngerät geschenkt, nachdem er in diesem Jahr schon mehrmals über Stehlampenkabel gestolpert sei. Das echte Weihnachten will die Familie Rau trotzdem am 24. Dezember feiern.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2003

Übungen zur Analysis II

– Blatt 10 –

Abgabe Dienstag, 1.7.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 41 (4 Punkte). Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$, und $a = 2^{\frac{1}{3}},\ b = 2^{\frac{2}{3}}$.

a) Zeigen Sie: Es existieren $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ sowie genau eine Funktion
$$h : U_\varepsilon(a) \to U_\delta(b) \quad \text{mit} \quad F(x, h(x)) = 0 \quad \forall\, x \in U_\varepsilon(a)\,.$$

b) Untersuchen Sie, ob h in a ein lokales Extremum besitzt.

Aufgabe 42 (4 Punkte). Sei
$$\mathbb{T} := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\right)^2 + z^2 = 1\right\}$$
der Torus im $\mathbb{R}^3$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{T}$ eine C^1-Hyperfläche ist.

b) Bestimmen Sie alle Punkte $a \in \mathbb{T}$, in denen $N_a\,\mathbb{T} = \mathbb{R} \cdot e_3$ gilt.

c) Skizzieren Sie im $\mathbb{R}^3$ die Teilmengen
$$K_1 := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{T} \;\middle|\; x = 0\right\},$$
$$K_2 := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{T} \;\middle|\; z = 0\right\}.$$

Aufgabe 43 (5 Punkte). Bestimmen Sie für die Funktion
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto y^2 - 3xy$$
die absoluten Maxima und Minima auf der Menge
$$A := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 3y^2 + x^2 + 2xy \le 2\right\}.$$

Aufgabe 44 (mündlich). Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

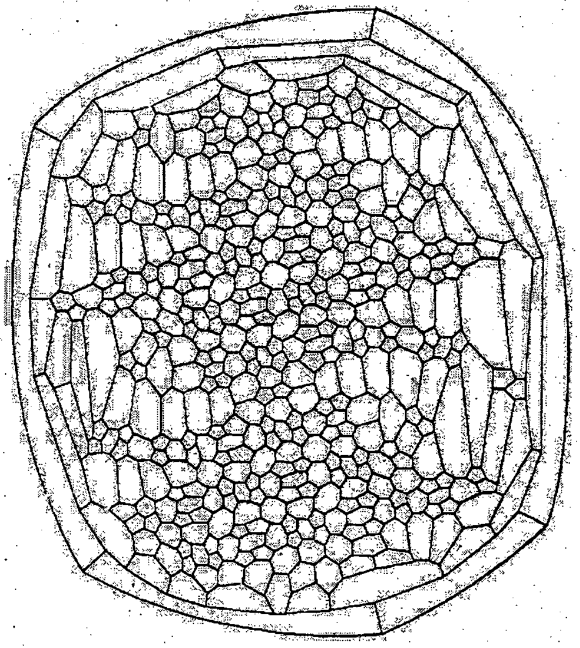
a) Die Menge
$$H_1 := \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \langle Ax \,|\, x\rangle = 1\right\}$$
ist stets eine (evtl. leere) C^1-Hyperfläche.

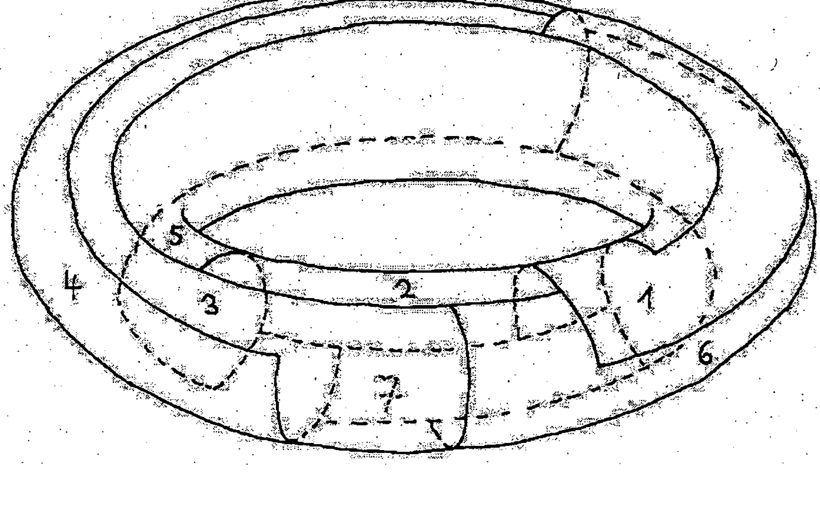
Ist $A^2 = E_n$, so existiert zu jedem $a \in H_1$ ein $x \in N_a\,H_1$ mit $x \in H_1$.

b) Es gibt Matrizen A, so dass
$$H_0 := \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \langle Ax \,|\, x\rangle = 0\right\}$$
C^1-Hyperfläche bzw. keine C^1-Hyperfläche ist. (Zwei Beispiele!)

Der Torus kann lokal mit der Ebene identifiziert werden, seine globalen Eigenschaften sind aber grundlegend verschieden. Ein Beispiel dazu gibt das **Färbungsproblem**. 1852 stellte F. Guthrie die Vermutung auf, dass sich jede Karte in der Ebene mit höchstens 4 Farben so färben lässt, dass je zwei benachbarte "Länder" eine verschiedene Farbe haben. Die Länder sind hier stets zusammenhängende Mengen, eine Berührung nur in einer Ecke wird nicht gezählt. Die Vermutung wurde 1977 von Appel und Haken bewiesen, es war der erste Beweis in der Mathematik, bei dem umfangreiche Teiluntersuchungen (es gibt 1480 Unterfälle) nur mit Hilfe eines Rechners durchgeführt werden konnten; die Überprüfung des Beweises dauerte ca. 10 Jahre.

Die folgende Skizze zeigt, dass am Torus mindestens 7 Farben benötigt werden: jedes der Gebiete hat eine gemeinsame Grenze mit allen übrigen (das Gebiet 7 liegt vollständig auf der Rückseite).





Literatur. Appel, Haken: The four color proof suffices, The Math. Intelligencer, Vol. 8, 10-20, 1986.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2003

Übungen zur Analysis II

– Blatt 11 –

Abgabe Dienstag, 8.7.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 45 (4 Punkte). Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei das Anfangswertproblem (AWP)

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= \lambda^2 y_1 \end{aligned}\,, \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

auf $G = \mathbb{R}^2$ gegeben.

a) Berechnen Sie die k-te Picard-Lindelöf-Iterierte.

b) Geben Sie eine Lösung an.

Aufgabe 46 (5 Punkte). Sei $f \in C(J \times G, \mathbb{R}^n)$ und $\varphi : [a,b[\; \to \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Lösung von

$$y' = f(x,y)$$

mit $[a,b] \subset J$ und $\overline{\varphi([a,b[)} \subset G$. Zeigen Sie, dass φ stetig in den Randpunkt b fortsetzbar ist und diese Fortsetzung noch immer Lösung der Differentialgleichung ist.
Hinweis: Ist $(x_k) \subset [a,b[$ eine Folge mit $\lim x_k = b$ so ist $(\varphi(x_k))$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 47 (2 Punkte). Bestimmen Sie eine Lösung $\varphi :]0,\infty[\; \to \mathbb{R}$ des AWP

$$y' = \frac{10}{3x}\, y + \frac{2}{3}\, x\,, \quad y(1) = 1\,.$$

Aufgabe 48 (mündlich). Für welche $\alpha > 0$ sind die Lösungen des AWP zu

$$y' = |y|^\alpha$$

eindeutig? Zeigen Sie, dass für die anderen α das AWP

$$y' = |y|^\alpha, \quad y(1) = 1$$

zwei verschiedene auf $\mathbb{R}$ definierte Lösungen hat.

Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires.

Par

G. Peano à Turin.

Soit donné le système d'équations différentielles, ramené à la forme normale:

$$\frac{dx_1}{dt} = \varphi_1(t, x_1, \ldots, x_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = \varphi_n(t, x_1, \ldots, x_n),$$

où les $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont des fonctions continues aux environs de $t = b$, $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$. Dans cette Note on prouve que l'on peut déterminer un intervalle (b, b'), et, dans cet intervalle, n fonctions $x_1 \ldots x_n$ de t, qui satisfont aux équations données, et qui, pour $t = b$, prennent les valeurs $a_1 \ldots a_n$.*)

Définition.

1. $f \, \varepsilon \, (\mathrm{K\,q_n})/\mathrm{Q} \,.\supset.\, f0 = \lim\limits_{h=0} fh = \mathrm{q_n} \cap \overline{x\,\varepsilon}\left[\lim\limits_{h=0} \mathrm{l_1\,m}(fh - x) = 0\right].$

Conséquences immédiates.

2. $f \, \varepsilon \, (\mathrm{K\,q_n}) / \mathrm{Q} \,.\, x \, \varepsilon \, \mathrm{q_n} : h \, \varepsilon \, \mathrm{Q} \,.\supset_h.\, x \, \varepsilon \, fh \,.\!\cdot\!.\supset.\, x \, \varepsilon \, f0.$
$\{\mathrm{Hp} \,.\supset.\, \mathrm{l_1\,m}(fh - x) = 0 \,.\supset.\, \mathrm{Ts}\}.$
3. $f \, \varepsilon \, (\mathrm{K\,q_n})/\mathrm{Q} \,.\supset.\, \mathrm{q_n} \cap \overline{x\,\varepsilon}\,[h \, \varepsilon \, \mathrm{Q} \,.\supset_h.\, x \, \varepsilon \, fh] \supset f0.$ $\quad \{\mathrm{P2} = \mathrm{P3}\}.$
4. $f \, \varepsilon \, (\mathrm{K\,q_n}) / \mathrm{Q} \,.\, a \, \varepsilon \, \mathrm{K\,q_n} \,.\, k \, \varepsilon \, \mathrm{Q} : h \, \varepsilon \, \theta k \,.\supset_h.\, fh \supset a \,.\!\cdot\!.\supset.\, f0 \supset \mathrm{C}a.$
$\{\mathrm{Hp} \,.\, x \, \varepsilon \, f0 \,.\, h \, \varepsilon \, \theta k :\supset: \lim\limits_{h=0} \mathrm{l_1\,m}(fh - x) = 0 \,.\, \mathrm{l_1\,m}(fh - x)$
$\geq \mathrm{l_1\,m}(a - x) :\supset: \mathrm{l_1\,m}(a - x) = 0 :\supset: x \, \varepsilon \, \mathrm{C}a\}.$
5. $f, g \, \varepsilon \, (\mathrm{K\,q_n}) / \mathrm{Q} : h \, \varepsilon \, \mathrm{Q} \,.\supset_h.\, fh \supset gh \,.\!\cdot\!.\supset.\, f0 \supset g0.$
$\{\mathrm{Hp} \,.\, x \, \varepsilon \, f0 \,.\, h \, \varepsilon \, \mathrm{Q} :\supset: \mathrm{l_1\,m}(fh - x) \geq \mathrm{l_1\,m}(gh - x) \,.\, \lim \mathrm{l_1\,m}(fh - x)$
$= 0 :\supset: \lim \mathrm{l_1\,m}(gh - x) = 0 :\supset: x \, \varepsilon \, g0\}.$
6. $f, g \, \varepsilon \, (\mathrm{K\,q_n}) / \mathrm{Q} \,.\supset.\, \lim\,(fh \cap gh) \supset f0 \cap g0.$
$\{\mathrm{Hp} \,.\, h \, \varepsilon \, \mathrm{Q} :\supset: fh \cap gh \supset fh \,.\, fh \cap gh \supset gh : \mathrm{P5} :\supset.\, \mathrm{Ts}\}.$
6'. $f, f_1, f_2 \, \varepsilon \, (\mathrm{K'q_n})/\mathrm{Q} : h \, \varepsilon \, \mathrm{Q} \,.\supset_h.\, f_1 h \supset fh \supset f_2 h : f_1 0 = f_2 0 \,.\!\cdot\!.\supset.\, f0$
$= f_1 0 = f_2 0.$ $\quad \{\mathrm{P5} \supset \mathrm{P6'}\}.$
7. $f \, \varepsilon \, (\mathrm{K\,q_n}) / \mathrm{Q} \,.\supset.\, \lim fh = \lim \mathrm{C}(fh).$ $\quad \{\S\mathrm{d}\ \mathrm{P19} \supset \mathrm{P7}\}.$

Auszug aus den Mathematischen Annalen, Vol. 37, 1890.

Dass der Satz von Peano über die Existenz von Lösungen eines AWP bei nur stetiger rechter Seite zunächst wenig Anerkennung erfuhr, mag auch an der etwas eigenwilligen Notation von Peano gelegen haben.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2003

Übungen zur Analysis II

– Blatt 12 –

Abgabe Dienstag, 15.7.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 49 (mündlich). Zeigen Sie, dass für alle $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ das AWP

$$y' = x^2 \cos y + |y| \quad \text{auf} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad y(0) = 1\,,$$

genau eine Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt.

Aufgabe 50 (4 Punkte). Bestimmen Sie die Lösung mit maximalem Existenzintervall des AWP

$$y' = -\sin x \, \frac{1+y^2}{y} \quad \text{auf} \quad \mathbb{R} \times]0,\infty[\,, \quad y(0) = 1\,.$$

Aufgabe 51 (4 Punkte). Zeigen Sie: Das AWP

$$y' = -2\,\frac{y}{x} - 2x^2\, y^{\frac{3}{2}} \text{ auf }]0,\infty[\times]0,\infty[\quad y(2) = \frac{1}{4} \tag{1}$$

geht durch die Substitution $z = y^{-\frac{1}{2}}$ in das AWP

$$z' = \frac{z}{x} + x^2 \text{ auf }]0,\infty[\times]0,\infty[\quad z(2) = 2 \tag{2}$$

über, d.h. $\varphi : I \to]0,\infty[$ ist Lösung von (1) genau dann, wenn $\psi := \varphi^{-\frac{1}{2}} : I \to]0,\infty[$ Lösung von (2) ist.

Berechnen Sie eine Lösung von (1).

Aufgabe 52 (4 Punkte). Es sei $\gamma > 0$. Gegeben sei das AWP

$$x'' = -\frac{\gamma}{x^2} \text{ für } x > 0, \qquad x(0) =: r_0 > 0, \quad x'(0) =: v_0 > 0, \tag{3}$$

und es sei

$$a := \frac{2\gamma}{r_0} - v_0^2\,.$$

Zeigen Sie:

a) Ist $a > 0$, so gilt für jede Lösung φ von (3):

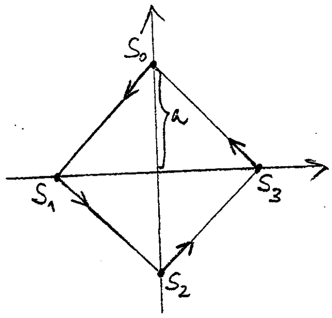
$$\varphi(t) \le \frac{2\gamma}{a} \qquad \text{für alle} \quad t\,.$$

b) Ist $a \le 0$ und

$$G : [r_0,\infty[\to \mathbb{R}, \quad r \mapsto \int_{r_0}^{r} \frac{ds}{\sqrt{2\frac{\gamma}{s} - a}}\,,$$

so ist $\varphi = G^{-1}$ eine unbeschränkte Lösung von (3).

Dienstag morgens trifft man im Hörsaalgebäude vier Studenten S_0 (= L.E.), S_1 (= S.K.), S_2 (= C.F.G.) und S_3 (= K.W.), die gerade auf den vier Ecken eines Quadrats stehen,



als Ihnen einfällt, dass sie eigentlich noch ihre Aufgabenbearbeitungen vervollständigen könnten. (Dazu muss man wissen, dass die Aufgaben wieder einmal viel zu schwierig und zu umfangreich gewesen sein sollen.) So beginnt S_0 direkt auf S_1 zuzugehen, um von ihm noch den einen oder anderen Lösungshinweis – oder auch mehr – zu bekommen; S_1 setzt aber alle Hoffnung auf S_2 und geht deshalb direkt auf diesen zu, der allerdings direkt hinter S_3 herläuft, um diesen als Vorarbeiter zu gewinnen. S_3 wiederum sieht S_0 als einzigen Retter in der Not an und folgt daher diesem direkt. Alle vier setzen sich im selben Augenblick in Bewegung und gehen alle mit (betragsmäßig) gleicher Geschwindigkeit.

Seien

$$\alpha : \left[0, \sqrt{2}a\right[\to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{\pi}{2} - \ln\left(1 - \frac{t}{\sqrt{2}a}\right)$$

und

$$S_0 : \left[0, \sqrt{2}a\right[\to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \left(a - \frac{t}{\sqrt{2}}\right)(\cos\alpha(t), \ \sin\alpha(t))$$

sowie $S_j(t) = e^{j \cdot i \frac{\pi}{2}} S_0(t)$ für $j = 1, 2, 3$.

Zeigen Sie, dass damit Lösungen gegeben sind, d.h. die Richtung von $S_j(t)$ zeigt auf $S_{j+1}(t)$ für alle t und $j = 0, 1, 2, 3$ (mit $S_4 := S_0$).

Wie lang ist die Wegstrecke unserer Studierenden?

Interpretieren Sie dieses Ergebnis.

Übungen zur Analysis II
– Blatt 13 –
Abgabe Dienstag, 22.7.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 53 (mündlich). Sei $r > 0$, $J =]-r, r[$ und $a, b : J \to \mathbb{R}$ seien stetig, a sei ungerade $(a(-x) = -a(x))$, b sei gerade $(b(x) = b(-x))$.

Zeigen Sie, dass für die Differentialgleichung

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = 0 \tag{4}$$

gilt:

a) Ist $\phi : J \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (4), so auch $\check{\phi} : J \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \phi(-x)$,

b) Die Gleichung (4) besitzt ein Fundamentalsystem, das aus einer geraden und einer ungeraden Funktion besteht.

Aufgabe 54 (7 Punkte). Geben Sie die Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ von $y' = Ay$, $y(0) = \eta$ $(\in \mathbb{R}^2)$ für folgende sechs Fälle an:

a) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit (i) $\lambda < 0 < \mu$, (ii) $\lambda = \mu < 0$, (iii) $\lambda < \mu < 0$;

b) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda < 0$;

c) $A = \begin{pmatrix} \sigma & -\tau \\ \tau & \sigma \end{pmatrix}$, $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$, $\tau \neq 0$, mit (i) $\sigma < 0$, (ii) $\sigma = 0$.

Skizzieren Sie jeweils die Bilder $\varphi(\mathbb{R})$ einiger Lösungskurven.

Letzte vermischte Nachrichten

Ein Beitrag zum aktuellen Vorlesungsstoff, die lang erwartete Fundierung der Ehekrisen durch den Beziehungsforscher John Gottman:

Bislang fehlte der Theorie allerdings noch die Weihe der höheren Mathematik. Dieses Manko ist jetzt behoben. *The Mathematics of Marriage: Dynamic Nonlinear Models* heißt Gottmans 37. Buch. Darin beschreibt der Beziehungsguru die Wechselwirkung der Eheleute mit Differenzialgleichungen. Mit „Einfluss-Funktionen“ wird ermittelt, wie die negativen Emotionen des einen Partners auf die Laune des anderen abfärben. Gespräche werden in Koordinatensysteme gezwängt. Vektoren deuten in die innere Emigration oder auf den Wutausbruch. Der Rest ist simpel: Geht die erste Ableitung der Gefühlskurve gegen unendlich, droht die Singularität des Ehebruchs.

Mit seiner Ehe-Mathematik dürfte Gottman die empirische Psychologie so vollenden wie Isaac Newton die klassische Physik. Spannend wird es aber erst mit Baby. Ab drei Körpern gilt die Chaostheorie. MAX RAUNER

Aus: “Die Zeit” vom 22.5.2003

Sprüche berühmter Leute

David Hilbert auf die Frage, welches mathematische Problem er für das wichtigste halte: *“Das Problem der Nullstellen der Zeta-Funktion; nicht nur in der Mathematik, es ist abslout das Wichtigste.”*

Auch ein Motto für die Vorlesung?

Carl Friedrich Gauss, der von seinem Freund Pfaff zum Konzertbesuch von Beethovens Neunter überrdet worden war, nach Ende der Aufführung: *“Und was ist damit bewiesen?”*

Eugene Wigner: *“Das Wunder, dass sich die Sprache der Mathematik für die Formulierung der physikalischen Gesetze eignet, ist ein herrliches Geschenk, das wir weder verstehen noch verdienen.”*