Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Thomas Eckert

Sommersemester 2003

Übungen zur Analysis II

– Sonderübungen –

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\|$. Zeige

$$\big\|\mathrm{grad}\big(\ln \circ r\big)(x)\big\| = \frac{1}{\|x\|}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Welche der folgenden Mengen sind kompakt?

$$A := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|\, e^{\|x\|} \leq 1\},$$
$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \arctan(xy) \leq 1\}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Löse das AWP

$$y' = -2xy + 2x, \quad y(0) = 2.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte). Bestimme für reelle Parameter a, b, c die lokalen (und absoluten) Extremstellen von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + ax + by + c.$$

Aufgabe 5 (4 Punkte). Bestimme die lokalen Extremstellen des Polynoms

$$p(x, y) = x^3 + 3xy^2$$

auf der Sphäre $S^1 \subset \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 6 (4 Punkte). Zeige die Existenz einer Nullstelle von

$$f : S^1 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto 4x^3 + 3xy - y^2 + 3.$$

Aufgabe 7 (4 Punkte). Zeige: Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x^2 - \frac{3}{2}y^2, xy)$$

ist lokaler C^1-Diffeomorphismus, aber nicht global invertierbar.

Aufgabe 8 (4 Punkte). Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto xy^2 + 2x^2e^y - y$. Zeige, dass das Gleichungssystem $f(x, y) = 0$ um $(0, 0)$ glatt nach y auflösbar ist, das heißt, mit einer C^1-Funktion h um 0, $h(0) = 0$, gilt

$$f(x, y) = 0 \iff y = h(x).$$

Berechne $h'(0)$

Lösungshinweise

Aufgabe 1 (4 Punkte). Es ist $\big(\mathrm{grad}(\ln\circ r)\big)(x) = \ln'(r(x)) \cdot \dfrac{x}{r(x)} = \dfrac{x}{r^2(x)}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte). A ist kompakt, denn $A = (\|\,\bullet\,\|\, e^{\|\bullet\|})^{-1}(]-\infty, 1])$ ist abgeschlossen und $A \subset B_1(0)$. B ist unbeschränkt, denn $B \supset 0 \times \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Die lineare DGL hat homogene Lösung $\psi(x) = e^{-x^2}$ und inhomogene Lösung $\varphi(x) = e^{-x^2} + 1$.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Kritischer Punkt ist nur $(x_0, y_0) = \frac{1}{3}(b - 2a, a - 2b)$ mit $\partial^2 f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, positiv definit nach Minoren-Kriterium. Also lokales Minimum in (x_0, y_0).

Wegen $(x \pm y)^2 \geq 0$ ist $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ und damit $|f(x,y)| \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\Big(1 - 2\left|\dfrac{ax + by + c}{x^2 + y^2}\right|\Big)$, wobei der hintere Summand gegen null geht für normgroße (x, y). Also exisitiert $r > 0$ mit $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ für $\|(x, y)\| \geq r$. Dann nimmt f sein Minimum auf $B_r(0)$ (kompakt) aber im Inneren an, also in (x_0, y_0).

Aufgabe 5 (4 Punkte). Mit $F(x, y) := x^2 + y^2 - 1$ ist $S^1 = F^{-1}(\{0\})$. Per Langrange-Multiplikator ergibt sich für kritische Punkte $\partial f(x, y) = \lambda \partial F(x, y)$, also (abgesehen von $\pm(0, 1)$ und $\pm(1, 0)$!) die Gleichung $\frac{3x^2+3y^2}{2x} = \frac{6xyy}{2y}$ oder $\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\frac{y^2}{x} = 3x$ und wegen $x^2 + y^2 = 1$ erhält man $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ und ebenso y.

Aufgabe 6 (4 Punkte). Es ist $f(1, 0) = 7$ und $f(-1, 0) = -1$. Da f stetig ist und S^1 zusammenhängend, ist auch das Bild $f(S^1)$ zusammenhängend, also ein Intervall und damit $0 \in [-1, 7] \subset f(S^1)$.

Aufgabe 7 (4 Punkte). Die erste Aussage liefert der SUF, da $\det \partial f(x, y) = \begin{vmatrix} 2x & -3y \\ y & x \end{vmatrix} = 2x^2 + 3y^2 > 0$. Aber f ist nicht (global) injektiv, da $f(1, 1) = f(-1, -1)$.

Aufgabe 8 (4 Punkte). Die Behauptung ist gerade die Aussage des SIF, der anwendbar ist, weil $\partial f(0, 0) = (0, -1)$ und damit $\partial_y f(0, 0) = -1$ "invertierbar" ist. Und es gilt $h'(0) = -(\partial_y f(0, 0))^{-1} \partial_x f(0, 0) = -(-1) \cdot 0 = 0$.