Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2003

# Analysis II

– Klausur –

Mittwoch, 19.7.2003, 11.15-13.45 Uhr, HS A+B (Chemie)

**Name** ________________________________________

**Vorname** ______________________________________

**Wichtig, bitte beachten:**

1. Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt. Kennzeichnen Sie dieses jeweils mit Ihrem Namen und der Nummer der Aufgabe.
2. Geben Sie stichpunktartig Begründungen für Ihre Schlüsse und Rechnungen an.
3. Tragen Sie in das Deckblatt deutlich lesbar Ihren Namen ein und markieren Sie in der ersten Zeile der Tabelle die von Ihnen bearbeiteten Aufgaben.

**Viel Erfolg!**

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 5 | 3 | 7 | 4 | 35 |
| Erreicht | | | | | | | | | | |

**Aufgabe 1** (4 Punkte). Welche der folgenden Mengen sind kompakt?

$$\begin{aligned} A &:= \{x \in \mathbb{R}^n : \ \ln(\|x\| + 1) \leq 10\} \\ B &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + 2 \leq x^2 + y^2 + 1\} \\ C &:= \{(e^x \sin y, \ x^3) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + 2y^2 = 1\} \end{aligned}$$

**Aufgabe 2** (3 Punkte). Ist die Abbildung

$$T : C^1([a, b]) \to C([a, b]), \quad f \mapsto \int_a^{\cdot} f'$$

stetig, wenn beide Räume mit der Supremumsnorm versehen sind?

**Aufgabe 3** (3 Punkte). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $g : I \to \mathbb{R}$ steng monoton und stetig und $f \in C(I, \mathbb{R})$. Zeigen Sie: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ mit

$$|f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k \, g^k(x)| \; < \; \varepsilon \;\; \forall \, x \in I \, .$$

**Aufgabe 4** (3 Punkte). Zeigen Sie, dass für die Bogenlänge der Kurve

$$\varphi : [1, \infty[ \, \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \frac{1}{t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

auf jeden Parameterintervall $[1, b]$ gilt: $L\varphi([1, b]) \geq \ln b$.

**Aufgabe 5** (3 Punkte). Zeigen Sie: Ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $g'(0) = 0$, so ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(\|x\|)$$

differenzierbar in 0.

**Aufgabe 6** (5 Punkte). Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \; (x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + \sin x_2 \\ \cos x_1 \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie:

$$\|Df\,(a)\,x\|_2 \; \leq \; \frac{1}{3}\,\|x\|_2 \qquad \forall \; a \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad x \in \mathbb{R}^2$$

und folgern Sie die Existenz eines Fixpunktes von $f$ in der Menge $X = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$.

**Aufgabe 7** (3 Punkte). Sei

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; (x, y) \mapsto x^3 + xy - 1 \, .$$

Zeigen Sie: Es gibt $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ und eine Funktion $h \in C^1(U_\delta(0), \; U_\varepsilon(1))$, so dass für $(x, y) \in U_\varepsilon(1) \times U_\delta(0)$ gilt

$$F(x, y) = 0 \iff x = h(y) \, .$$

Geben Sie eine Formel an für $h'(y)$ für $y \in U_\delta(0)$.

**Aufgabe 8** (7 Punkte). Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + \alpha xy + y^2$.

a) Zeigen Sie: $f$ hat im Punkt $(0, 0)$

1) für $|\alpha| < 2$ ein lokales isoliertes Minimum,
2) für $|\alpha| > 2$ kein lokales Extremum,
3) für $|\alpha| = 2$ ein lokales Minimum, das nicht isoliert ist.

b) Berechnen Sie die Extremstellen von $f$ auf $B_1(0)$ im Fall $\alpha > 2$.

**Aufgabe 9** (4 Punkte). Berechnen Sie eine Lösung mit maximalem Existenzintervall des AWP

$$y' = \frac{e^{y^2}}{y} \qquad \text{auf} \quad \mathbb{R} \times \, ]0, \infty[ \; , \quad y(0) = 1 \, .$$