Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2003

Analysis II

– Nachklausur –

Donnerstag, 9.10.2003, 9.15–11.45 Uhr, Hörsaal B, Chemie

Name ______________________________

Vorname ______________________________

Wichtig, bitte beachten:

1. Tragen Sie in das Deckblatt deutlich lesbar Ihren Namen ein.
2. Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern, weiteres Papier bei der Aufsicht.
3. Der Schreibblock darf nicht auseinander genommen werden.
4. Geben Sie stichpunktartig Begründungen für Ihre Schlüsse und Rechnungen an.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
Punkte	3	3	4	4	3	4	3	4	4	32
Erreicht										

Aufgabe 1 (3 Punkte). Sei (X, d) ein metrischer Raum, (a_k) eine Cauchyfolge in X und (a_{kj}) eine konvergente Teilfolge von (a_k). Zeigen Sie, dass dann auch (a_k) konvergiert.

Aufgabe 2 (3 Punkte). Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ sei $A_n := \left\{(x, \frac{1}{n}x) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq 0\right\}$. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte). In welchen Punkten ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto |xy|$$

partiell differenzierbar? Zeigen Sie, dass f in $(0, 0)$ total differenzierbar ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und nichtleer, $f : \overline{G} \to \mathbb{R}$ stetig, $f|_G$ differenzierbar und $f(x) = 0 \;\forall\, x \in \partial G = \overline{G} \setminus G$. Zeigen Sie die Existenz eines Punktes $a \in G$ mit $\operatorname{grad} f(a) = 0$.

Aufgabe 5 (3 Punkte). Zeigen Sie, dass die Kurve

$$\varphi:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} te^t \\ \sin 2\pi t \end{pmatrix}$$

nach der Bogenlänge parametrisierbar ist.

Aufgabe 6 (4 Punkte). Sei $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x + y \in \pi\mathbb{Z}\}$ und

$$f:\ \mathbb{R}^2 \setminus M \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (e^x\ \cos y,\ \ e^y\ \sin x)\,.$$

a) Zeigen Sie, dass f ein lokaler Diffeomorphismus ist.

b) Ist f ein globaler Diffeomorphismus?

Aufgabe 7 (3 Punkte). Sei $F : \mathbb{R} \times\,]0, \infty[\, \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto e^{x/y}$.

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $F(x, y) = F(a, b)$ für alle (a, b) lokal nach x auflösbar ist, d.h. es existiert ein offenes Intervall J um b und $h \in C^1(J, \mathbb{R})$ mit $F(h(y), y) = F(a, b)$ für alle $y \in J$.

b) Stellen Sie für die lokale Auflösung h aus a) eine Differentialgleichung auf.

Aufgabe 8 (4 Punkte). Untersuchen Sie die Funktion

$$f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 y^2$$

auf lokale Extrema auf $H = S_1(0)$.

Aufgabe 9 (4 Punkte). Bestimmen Sie eine Lösung $\varphi :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y \ = \ 0$$

mit $\varphi(0) = 0$ und $\lim\limits_{x\to\infty}\ \varphi(x) = \infty$.