Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2003/04

Übungen zur Analysis III

– Blatt 1 –

Abgabe Montag, 3.11.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (2+1+3 Punkte). Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionale Daniell-Integrale sind.

a) $\mu : C_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi(j)$

b) $a \in X$ fest, $\mu : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \varphi(a)$

c) $X = \{\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \sum_{j=0}^{\infty} |\varphi(j)| \text{ konvergiert}\} \quad (= \ell^1(\mathbb{N})) \quad \mu : X \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} \varphi(j)$

(Hinweis: Gilt $\varphi_k \searrow 0$, so existiert j_0 mit $\sum_{j>j_0} \varphi_k(j) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle k.)

Aufgabe 2 (mündlich).

a) Sei X ein kompakter metrischer Raum und $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ positiv und linear. Zeigen Sie: μ ist stetig, das heißt, es existiert $c \geq 0$ mit

$$|\mu(\varphi)| \leq c\|\varphi\|_\infty \quad \text{für alle} \quad \varphi \in C(X)\,.$$

b) Gilt die Aussage auch für positives und lineares $\mu : C_c(X) \to \mathbb{R}$, falls X lokalkompakt ist?

Aufgabe 3 (2 Punkte). Sei $Q := [-1,1]^3$ und

$$f : Q \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \sin(x_1^2 \cdot x_2) \cdot \cos(x_2 \cdot x_3^2)\, e^{x_1 \cdot x_3}.$$

Berechnen Sie

$$\int_Q f(x)\, dx.$$

Aufgabe 4 (3 Punkte). Sei $\mathcal{R}$ ein Ring mit Inhalt μ und $\varphi, \psi \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$. Zeigen Sie

a) $\varphi \cdot \psi \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$ und b) $(\mu(\varphi \cdot \psi))^2 \;\leq\; \mu(\varphi^2) \cdot \mu(\psi^2)$.

Skript

- Manuskript im Semesterapparat in Fachbereichsbibliothek
- Wolfgang Gromes, Analysis III/Stochastik 1, WS 1996/97 (pdf-Datei)

Standardliteratur

- Otto Forster, Analysis 3, Vieweg, 1999 (skriptartig)
- Martin Barner & Friedrich Flohr, Analysis II, de Gruyter, Berlin 1987
- Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis, Teil 2, Teubner Verlag, Stuttgart 1991 (ausführlich, mit Hintergrund)
- Klaus Floret, Maßtheorie und Integrationstheorie, Teubner, 1981
- Alan Weir, General Integration and Measure, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1974

Scheinkriterien

- Regelmäßige und aktive Teilnahme am Tutorium
- 50% der Soll-Punkte der schriftlichen Übungsaufgaben, Doppelabgaben zugelassen (Mit Stern gekennzeichnete Aufgaben gehören zum Haben aber nicht zum Soll.)
- Vorbereiten von 1/3 der mündlichen Aufgaben
- *Für einen benoteten Schein zudem* Bestehen einer Klausur

Klausuren

- Klausur: Samstag, 21.2.2004, 9-12 h, HS B (Chemie)
- Nachschreibklausur: etwa letzte Woche vor Vorlesungsbeginn des nächsten Semesters

Diese und weitere Informationen unter:

www.mathematik.uni-marburg.de/∼eckert/2003 WS/

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes Wintersemester 2003/04

Übungen zur Analysis III
– Blatt 2 –
Abgabe Montag, 10.11.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 5 (3 Punkte). Sei $\mathcal{R}$ ein Ring, $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty[$ ein Inhalt. Zeigen Sie: Ist das von μ erzeugte Integral auf den Elementfunktionen $\mathcal{E}(\mathcal{R})$ ein Daniell-Integral, so ist μ ein Prämaß.
Hinweis: Zu $A = \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j$ p.d., betrachte $B_j := A \setminus \bigcup_{k \le j} A_k$.

Aufgabe 6 (4+3 Punkte).

a) Sei $\delta_a : \mathcal{E}(\mathcal{P}(X)) \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \varphi(a)$ das vom Dirac-Maß erzeugte Elementarintegral (Bsp. 1.21). Zeigen Sie:

$$\delta_a^*(f) = |f(a)| \quad \forall\, f : X \to \mathbb{R}$$

und bestimmen Sie damit $\mathcal{L}^1(\delta_a)$ und die Fortsetzung $\overline{\delta}_a$ von δ_a.

b) Bestimmen Sie analog für das Radon-Integral

$$\delta_a : C_c(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \varphi(a)$$

δ_a^* und $\overline{\delta}_a$.

Aufgabe 7 (3 Punkte). Sei $a \in \mathbb{R}$, $\lambda^1 = \lambda : C_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ das Radon-Integral aus Definition 1.12. Zeigen Sie (z.B. mit dem Satz von B. Levi)

$$1_{\{a\}} \in \mathcal{L}^1(\lambda) \text{ und } \overline{\lambda}(1_{\{a\}}) = 0,$$

und folgern Sie

$$1_{\mathbb{Q}} \in \mathcal{L}^1(\lambda) \text{ und } \overline{\lambda}(1_{\mathbb{Q}}) = 0.$$

Aufgabe 8 (mündlich). Sei $\mu : \mathcal{L}^1(\mu) \to \mathbb{R}$ ein Daniell-Integral. Zeigen Sie durch Beispiele:

a) Ist $(f_k) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $f_k \to f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\mu(f_k)$ konvergiert, so folgt *nicht* $\lim_{k\to\infty} \mu(f_k) = \mu(f)$.

b) Ist $(f_k) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $f_k \to f$ und $\mu(f_k)$ konvergiert, so folgt *nicht* $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2003/04

Übungen zur Analysis III
– Blatt 3 –
Abgabe Montag, 17.11.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 9 (4 Punkte). Sei $f : [a, b+1] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$|f'(x)| \leq M \qquad \text{für alle} \quad x \in [a, b+1]\,.$$

Zeigen Sie:

$$f' \in \mathcal{L}^1([a,b], \lambda) \quad \text{und} \quad \int\limits_{[a,b]} f'(x)\, dx = f(b) - f(a)\,.$$

Hinweis: Man betrachte die Folge $(f_k) \subset \mathcal{L}^1([a,b], \lambda)$,

$$f_k(x) \;:=\; k(f(x + \frac{1}{k}) - f(x)),\;\; x \in [a,b], \;\; k \geq 1\,.$$

Aufgabe 10 (mündlich). Sei $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\, 1_{[k-1,\,k[}$.

Zeigen Sie: f ist uneigentlich regel-integrierbar, aber nicht Lebesgue-integrierbar.

Aufgabe 11 (4 Punkte, Lemma von Fatou). Sei $(f_k) \subset \mathcal{L}^1_+(\mu)$ mit $\mu(f_k) \leq c \in \mathbb{R}$ fÃ¼r alle $k \in \mathbb{N}$ und $f_k \to f$. Zeigen Sie:

$$f \in \mathcal{L}^1_+(\mu) \quad \text{und} \quad \mu(f) \leq c\,.$$

Hinweis: Betrachte $h_k := \inf\limits_{m \geq k} f_m$ wie im Beweis von Satz 2.12.

Aufgabe 12 (4 Punkte). Sei

$$\Gamma :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \;\; t \mapsto \int\limits_0^\infty x^{t-1}\, e^{-x}\, dx,$$

und

$$\zeta :]1, \infty[\to \mathbb{R}, \;\; t \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^t}$$

(vgl. Analysis I, Def. 8.34, Bsp. 7.22). Begründen Sie, dass obiges Integral auch als Lebesgue-Integral existiert, und zeigen Sie für $t > 1$

$$\zeta(t) \cdot \Gamma(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_0^\infty x^{t-1}\, e^{-kx}\, dx = \int\limits_0^\infty \frac{x^{t-1}}{e^x - 1}\, dx\,.$$

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes Wintersemester 2003/04

Übungen zur Analysis III

– Blatt 4 –

Abgabe Montag, 24.11.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 13 (4 Punkte). Es sei $f \in \mathcal{L}^1([0,1], \lambda)$.

Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$f_k : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^k f(x)$$

λ-integrierbar ist und dass der Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)\, dx$$

existiert. Geben Sie den Grenzwert an.

Aufgabe 14 (mündlich). Zeigen Sie, dass folgende Mengen λ^2-messbar sind:

a) $[0,1[\times [0,1[\subset \mathbb{R}^2$

b) $\big\{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \;\big|\; 0 \le y \le f(x)\big\}$,
wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $f \ge 0$.

Aufgabe 15 (4 Punkte). Sei μ ein vollständiges Daniell-Integral, $\mathcal{A}_\mu$ die von μ erzeugte σ-Algebra und $\rho \in \mathcal{L}^1_+(\mu)$. Zeigen Sie:

$$\mu_\rho : \mathcal{A}_\mu \to \mathbb{R}; \quad A \mapsto \int_A \rho\, d\mu := \mu(\rho \cdot 1_A)$$

ist ein Maß.

Aufgabe 16 (3+3 Punkte, Beispiel einer nicht-Lebesgue-messbaren Menge). Sei $\lambda : \mathcal{A}_\lambda \to [0,\infty]$ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$.

a) $(*)$ Zeigen Sie, dass λ translations-invariant ist, d.h. für $A \in \mathcal{A}_\lambda$, $x \in \mathbb{R}$ ist
$$x + A \in \mathcal{A}_\lambda \text{ und } \lambda(x+A) = \lambda(A).$$

b) Sei auf $[0,1]$ die Äquivalenzrelation $x \sim y :\Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ gegeben und $E \subset [0,1]$ ein Repräsentantensystem, d.h.

$$x \ne y \text{ aus } E \Longrightarrow x - y \notin \mathbb{Q}$$

und

$$\forall\, a \in [0,1]\ \exists\, x \in E : x - a \in \mathbb{Q}.$$

Sei $[-1,1] \cap \mathbb{Q} = \{r_0, r_1, r_2, \ldots\}$, $\quad E_n := r_n + E$. Zeigen Sie: $\big\{E_n \;\big|\; n \in \mathbb{N}\big\}$ ist paarweise disjunkt und $[0,1] \subset \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} E_n \subset [-1,2]$, und folgern Sie, dass $E \notin \mathcal{A}_\lambda$.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2003/04

Übungen zur Analysis III

– Blatt 5 –

Abgabe Montag, 1.12.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 13 (4 Punkte) *von Blatt 4 ist erst hier abzugeben.* Es sei $f \in \mathcal{L}^1([0,1],\lambda)$. Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$f_k : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^k\, f(x)$$

λ-integrierbar ist und dass der Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)\, dx$$

existiert. Geben Sie den Grenzwert an.

Aufgabe 17 (2 Punkte). Sei $f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$. Zeigen Sie:

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

ist definiert und stetig.

Aufgabe 18 (mündlich). Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie die sechs Implikationen zwischen den folgenden drei Aussagen:

a) f ist λ-fast überall stetig.

b) Es gibt eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f = g$ λ-fast überall.

c) Es gibt eine λ-Nullmenge $N \subset \mathbb{R}$, so dass $f|_{\mathbb{R}\setminus N}$ stetig ist.

Aufgabe 19 (3·2+3 Punkte). Sei für $k \in \mathbb{N}^*$

$$C_k := \bigcup \Big\{ [0, \frac{1}{3^k}] + \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{3^j} \;\Big|\; a_j \in \{0,2\}\ \forall\ j = 1,\ldots,k \Big\}$$

und $C := \bigcap_{k\geq 1} C_k$ das *Cantor'sche Diskontinuum.* Zeigen Sie:

a) C ist eine kompakte Lebesgue-Nullmenge.

b) Es gilt

$$C \supset \Big\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} \in [0,1] \;\Big|\; a_j \in \{0,2\} \quad \forall\ j \in \mathbb{N}^* \Big\}.$$

c) C ist überabzählbar. (Konstruieren Sie mit b) eine surjektive Abbildung auf $[0,1]$.)

d) $(*)$ In b) gilt sogar Gleichheit.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2003/04

Übungen zur Analysis III

– Blatt 6 –

Abgabe Montag, 8.12.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 20 (mündlich). Sei μ ein vollständiges Daniell-Integral. Zeigen Sie:

a) Ist $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig und $h : X \to \mathbb{C}$ μ-messbar, so ist auch $F \circ h$ μ-messbar.

b) Seien $f, g : X \to \mathbb{R}$; $g \in \mathcal{L}^0(\mu)$, so gilt:

$$f \in \mathcal{L}^1(\mu) \iff (\exp \circ ig) \cdot f \in \mathcal{L}^1(\mu)\,.$$

Aufgabe 21 (4 Punkte). Sei μ ein vollständiges Daniell-Integral,

$$\mathcal{N} := \big\{ f : X \to \mathbb{K} \;\big|\; f = 0 \;\; \mu\text{-f.ü.} \big\}\,.$$

Zeigen Sie:

a) $\mathcal{N}$ ist Untervektorraum von $\mathcal{L}^1(\mu)$.

b) $L^1(\mu) := \mathcal{L}^1(\mu)/\mathcal{N} \ni f + \mathcal{N} \mapsto \int f d\mu$ ist wohldefiniert und
$L^1(\mu) \ni f + \mathcal{N} \mapsto \int |f| d\mu$ ist eine Norm auf $L^1(\mu)$.

Aufgabe 22 (4 Punkte). Seien $f, g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$,

$$f(t) = \Big(\int_0^t e^{-x^2} dx \Big)^2, \quad g(t) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2(x^2+1)}}{x^2+1}\, dx\,.$$

Zeigen Sie:

a) $f'(t) + g'(t) = 0$ für alle $t \geq 0$ und folgern Sie $f(t) + g(t) = \frac{\pi}{4}$.

b) $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Aufgabe 23 (3 Punkte). Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 1 & ,0 \leq x \leq y < x+1 \\ -1 & ,0 \leq x,\;\; x+1 \leq y < x+2 \\ 0 & ,\text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx \Big) dy \neq \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy \Big)\, dx\,.$$

Was folgt daraus für f ?

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2003/04

Übungen zur Analysis III

– Blatt 7 –

Abgabe Montag, 15.12.2003, vor der Vorlesung

Aufgabe 24 (5 Punkte). Zeigen Sie:

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \Big(\int_0^\infty \sin x \cdot e^{-xy} dy \Big)\, dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

(Hinweis: Tonelli/Fubini und partielle Integration.)

Aufgabe 25 (mündlich). Zeigen Sie, dass

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad y \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x|y\rangle} e^{-\pi \|x\|^2} dx$$

definiert ist und berechnen Sie F.

Aufgabe 26 (3 Punkte). Sei $a > 0,\ b > 0$ und

$$E := \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \Big|\ y \geq 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \Big\}\,.$$

a) Begründen Sie, dass E Lebesgue-messbar ist und berechnen Sie mit Fubini $\lambda^2(E)$.

b) Stellen Sie E in der Form

$$\big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \big|\ x \in I, \ \ 0 \leq y \leq f(x) \big\}$$

dar und berechnen Sie $\int_I f(x) dx$.

Aufgabe 27 (3+1 Punkte).

a) Sei $\rho : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ stetig, $\rho^2 \in \mathcal{L}^1(\lambda)$,

$$R_\rho := \big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \big|\ x^2 + y^2 \leq \rho^2(z) \big\}\,.$$

Zeigen Sie: $1_{R_\rho} \in \mathcal{L}^1(\lambda^3)$ und

$$\lambda^3(R_\rho) = \pi \int_{\mathbb{R}} \rho^2(z) dz\,.$$

b) Berechnen Sie mit a) das Volumen $\lambda^3(K)$ des Kegels

$$K = \big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \big|\ 0 \leq z \leq h, \ \ x^2 + y^2 \leq z^2 \big\}\,.$$

(∗) c) Zeigen Sie, dass sich in a) die Voraussetzung "ρ stetig" durch "ρ Lebesgue-messbar" ersetzen lässt.

Aufgabe 28 ($*$). Ein kleiner Beitrag für den Nikolausstiefel, zum alsbaldigen Verbrauch bestimmt (bevor er Sparmaßnahmen zum Opfer fällt).

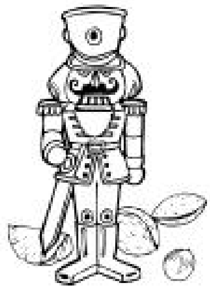
Die seit Jahren bewährte Marzipankartoffel

$$M := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} \leq 1 - z^2\right\}$$

(mit dem Achsenverhältnis der Grundellipse im goldenen Schnitt!) muss sich in diesem Jahr der neuen, mit großem Webeaufwand eingeführten

$$M_{super} := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2, y^2 \leq 3, \;\; z^2 \leq (3 - x^2)(3 - y^2)\right\}$$

erwehren, die auch noch 3% billiger angeboten wird. Wie sind die Marktchancen beim mündigen Marzipankonsumenten?



Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2003/04

Übungen zur Analysis III

– Blatt 8 –

Abgabe Montag, 12.1.2004, vor der Vorlesung

Aufgabe 28 (3 Punkte). Einem betrügerischen Nikolaus-Fabrikanten, der Nikoläuse mit kegelförmigem Schokoladenrumpf

$$K_{\text{Nik}} := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \le z \le 1,\;\; x^2 + y^2 \le \left(1 - \frac{z}{2}\right)^2 \right\}$$

und Pappkopf anfertigt, ist es nach langjähriger Forschungsarbeit gelungen, die Herstellungskosten durch Beimengung von Mehl zur Schokolade erheblich zu verringern. Das Geniale an der Erfindung ist, dass der Mehlanteil m nach außen hin exponentiell abfällt,

$$m : K_{\text{Nik}} \to \mathbb{R},\;\; (x,y,z) \mapsto \exp\left(-(x^2+y^2)^{1/2}\right),$$

so dass der Anblick der Nikoläuse unverändert ungetrübte Gaumenfreude verheißt. Man berechne die Minderung der realen Gaumenfreude, d.h. die Volumenprozent Mehl in K_{Nik}, also

$$100 \cdot \int_{K_{\text{Nik}}} m \, d\lambda^3 \Big/ \lambda^3(K_{\text{Nik}}).$$

Aufgabe 29 (mündlich). Sei $f \in \mathcal{L}^0(\lambda^{n+m})$. Zeigen Sie

$$f(x,\cdot) \in \mathcal{L}^0(\lambda^m) \qquad \lambda^n\text{-fast-überall.}$$

(Hinweis: f lässt sich durch $\mathcal{L}^1$-Funktionen approximieren.)

Aufgabe 30 (4 Punkte). Sei A eine reelle symmetrische und positiv definite $n\times n$-Matrix. Berechnen Sie:

a) $$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle} dx,$$

b) das Volumen des Ellipsoides

$$E := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \langle Ax, x\rangle \le 1 \right\}.$$

Hinweis: $A = C^t\, DC$ mit $C^t = C^{-1}$, D diagonal.

b/w

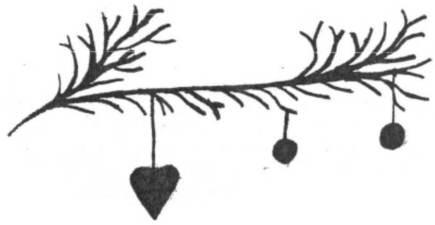
Aufgabe 31 (5 Punkte). Sei $A \in \mathcal{R}_{\lambda^n}$ beschränkt mit $\lambda^n(A) > 0$ und für $j = 1, \ldots, n$

$$s_j := (\lambda^n(A))^{-1} \int\limits_A x_j \, d(x_1, \ldots, x_n) \, .$$

Dann heißt $s_A := (s_1, \ldots, s_n)$ der Schwerpunkt von A.

a) Zeigen Sie: s "kommutiert" mit affinen Isomorphismen, das heißt, für alle $\phi = a + T$ mit $a \in \mathbb{R}^n$, $T \in \mathrm{GL}\,(n, \mathbb{R})$ gilt

$$s_{\phi(A)} = \phi(s_A) \, .$$



b) Für $\alpha \geq 1$ sei

$$H_\alpha := \left\{ (r \ \sin\theta, \ -r \ \cos\theta) \,\middle|\, 0 \leq r \leq \alpha + \cos\theta; \ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\} .$$

Zeigen Sie, dass $H_\alpha \in \mathcal{R}_{\lambda^2}$, und berechnen Sie den Schwerpunkt s_{H_α}.
Skizzieren Sie H_α und die Lage von s_{H_α}.

Frohe Weihnachten
und guten Rutsch
ins neue Jahr.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2003/04

Übungen zur Analysis III

– Blatt 9 –

Abgabe Montag, 19.1.2004, vor der Vorlesung

Aufgabe 32 (3 Punkte). Sei $f \in \mathcal{L}^1(\lambda^n)$, $\chi \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie:

a) Die Faltung
$$f * \chi : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\ \chi(y)\, dy$$
ist definiert und $f * \chi = \chi * f$.

b) $f * \chi$ ist stetig.

Aufgabe 33 (6 Punkte). Sei $f \in C(\mathbb{R}^n)$, $\chi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi(x)\, dx = 1$ und für $k \in \mathbb{N}^*$ sei
$$\chi_k(x) := k^n \cdot \chi(kx) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n\,.$$
Zeigen Sie:

a) $\chi_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$ und $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi_k(x)\, dx = 1$

b) $f * \chi_k(x) - f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(f(x - \frac{1}{k}\, y) - f(x) \Big)\, \chi(y)\, dy$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $k > 0$

c) $f * \chi_k \to f$ gleichmäßig auf jeder kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$

Bemerkung. Für $f \in C(\mathbb{R}^n)$ und $\chi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ ist die Faltung immer noch wohldefiniert und gelten die Aussagen aus Aufgabe 32.

Aufgabe 34 (3 Punkte). Mit der Bezeichnung in Aufg. 33) sei zusätzlich $\chi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie:

$f * \chi_k$ ist partiell differenzierbar und
$$\partial_j (f * \chi_k) = f * \partial_j\, \chi_k\,.$$

Ist $f * \chi_k \in C^1(\mathbb{R}^n)$?

Aufgabe 35 (mündlich). Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $\chi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi(x)\, dx = 1$ an (man kann z.B. χ rotationssymmetrisch wählen). Skizzieren Sie für $n = 1$ die Funktionen χ_k für $k = 1$ und $k = 2$.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2003/04

Übungen zur Analysis III

– Blatt 10 –

Abgabe Montag, 26.1.2004, vor der Vorlesung

Aufgabe 36 (4 Punkte). Sei $p \in [1, \infty[$, $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \lambda^n)$. Zeigen Sie: Die Translation

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \lambda^n), \quad y \mapsto f(\cdot - y)$$

ist definiert und stetig.

Hinweis: Die $\mathcal{L}^p$-Funktion f lässt sich durch C_c-Funktionen approximieren.

Aufgabe 37 (4 Punkte). Beweisen Sie die Formeln

$$\text{a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad\qquad \text{b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Hinweis: Parseval-Gleichung mit $f(x) = x$ und $f(x) = (x - \frac{1}{2})^2$.

Aufgabe 38 (4 Punkte). Sei $f \in C^1([0,1])$ mit $f(0) = f(1)$ und $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = 0$.
Zeigen Sie mit der Parseval-Gleichung

$$\text{a)} \ \|f\|_2 \leq \frac{1}{2\pi} \|f'\|_2,$$

$$\text{b)} \ \|f\|_2 = \frac{1}{2\pi} \|f'\|_2 \iff f \in \operatorname{Span}(e_1, e_{-1}).$$

Aufgabe 39 (mündlich). Sei $(c_k) \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Zeigen Sie: Die trigonometrische Reihe $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} c_k\, e_k$ konvergiert gleichmäßig gegen ein $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ und c_k ist der k-te Fourierkoeffizient von f für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2003/04

Übungen zur Analysis III

– Blatt 11 –

Abgabe Montag, 2.2.2004, vor der Vorlesung

Aufgabe 40 (3 Punkte). Sei $f = 1_{[0,\infty[}$ und $F := \int_0^{\cdot} f d\lambda$. Zeigen Sie:

$$F \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad \partial(\eta_F) = \eta_f.$$

Aufgabe 41 (4 Punkte). Seien $f, g \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$,

$$F := \int_a^{\cdot} f d\lambda, \quad G := \int_a^{\cdot} g d\lambda \quad \text{und} \quad A := \left\{ (x,y) \in [a,b]^2 \;\middle|\; a \leq y \leq x \right\}.$$

Zeigen Sie:

a) $(f \otimes g) \cdot 1_A \in \mathcal{L}^1([a,b]^2, \lambda^2)$

b) $\displaystyle\int_a^b F \cdot g d\lambda + \int_a^b f \cdot G d\lambda = F \cdot G\big|_a^b$

Aufgabe 42 (mündlich). Sei (η_k) eine Folge in $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$ mit $\eta_k \to \eta$ in $\mathcal{D}^*$, d.h.

$$\eta_k(\varphi) \to \eta(\varphi) \text{ für alle } \varphi \in \mathcal{D}.$$

Zeigen Sie, dass für $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$\partial_j \eta_k \to \partial_j \eta$$

und verallgemeinern Sie diese Aussage für $\partial^\alpha \eta_k$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Aufgabe 43 (4 Punkte). Berechnen Sie die Fouriertransformierte von f, wobei

a) $f(x) := \exp(-|x|)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) := \begin{cases} \exp(-x) & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$,

c) $f(x) := \exp(-x^2)\sin(ax^2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei $a > 0$ ist.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2003/04

Übungen zur Analysis III

– Blatt 12 –

Abgabe Montag, 9.2.2004, vor der Vorlesung

Aufgabe 44 (2 Punkte). Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\infty \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^3 dx\,.$$

Aufgabe 45 (5+3 Punkte). Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \lambda)$.

a) Zeigen Sie

$$\int_0^1 \sum_{j=-N}^{N} |f(x-j)|\,dx \;\le\; \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx$$

und folgern Sie

$$G(x) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} |f(x-j)| \text{ konvergiert f.ü. auf } [0,1] \text{ und } G \in \mathcal{L}^1([0,1], \lambda),$$

also gilt dies auch für $F(x) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(x-j)$.

b) Zeigen Sie für den k-ten Fourierkoeffizienten $c_k = \int_0^1 e^{-2\pi ikx} F(x)\,dx$ von F

$$c_k = \hat{f}(k)\,.$$

c) $(*)$ Ist $f \in C_c^1(\mathbb{R})$, so gilt die Poisson-Formel

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\,.$$

Aufgabe 46 (3 Punkte). Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, $a \in M$, $U \in \mathbb{R}^m$ offen und $\psi : U \to \mathbb{R}^n$ aus C^k mit

$$(+) \qquad \psi(U) \subset M, \quad \psi(y) = a \quad \text{und} \quad \operatorname{Rang} \partial\psi(y) = m.$$

a) Zeigen Sie: Es existiert eine offene Umgebung $\tilde{U}$ von y, so dass $\psi(\tilde{U}) =: \tilde{M} (\subset M)$ eine m-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit ist, und $\psi|_{\tilde{U}}$ ist eine lokale Parametrisierung von $\tilde{M}$.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall, dass $\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} \partial\psi_1(y) \\ \vdots \\ \partial\psi_m(y) \end{pmatrix} = m$ ist und setzen Sie

$$\Psi : U \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n, \quad (u, u') \mapsto \psi(u) + (0, u')\,.$$

b) (mündlich)
Zeigen Sie durch ein Beispiel: Existiert zu jedem $a \in M$ ein ψ, das (+) erfüllt, so folgt nicht, dass M eine m-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 47 (4 Punkte). Sei $K := \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; x^2 + y^2 = z^2,\;\; z \in \,]0, 1[\big\}$.

a) Zeigen Sie, dass K eine C^∞-Hyperfläche des $\mathbb{R}^3$ ist und skizzieren Sie K.

b) Berechnen Sie die Oberfläche $\sigma(K)$.

c) $(*)$ Geben Sie eine geometrische Interpretation des Resultats.

Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2003/04

Übungen zur Analysis III

– Blatt 13 –

Abgabe Montag, 16.2.2004, vor der Vorlesung

Aufgabe 48 (mündlich). Sei M eine m-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie den Satz von Lebesgue auf M: Ist

$$(f_k) \subset \mathcal{L}^1(M, \sigma) \quad \text{mit} \quad f_k \to f : M \to \mathbb{K}$$

und

$$|f_k| \le g \in \mathcal{L}^1_+(M, \sigma) \quad \forall\ k\,,$$

so ist $f \in \mathcal{L}^1(M, \sigma)$ und

$$\lim_k \int_M f_k d\sigma = \int_M f d\sigma.$$

Aufgabe 49 (4 Punkte). Berechnen Sie die Oberfläche des Torus

$$T := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2 \right\},$$

wobei $0 < r < R$ ist.

Aufgabe 50 (3 Punkte). Sei M eine m-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus. Zeigen Sie:

a) $S(M)$ ist ebenfalls m-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

b) Ist S orthogonal, so ist $\sigma(M) = \sigma(S(M))$, falls $1_M \in \mathcal{L}^1(M, \sigma)$.

Aufgabe 51 (4 Punkte). Sei

$$A := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} \le 1 \right\}$$

und

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (3x^2 z, y^2 - 2x, z^3)\,.$$

Berechnen Sie

$$\int_{\partial A} < F, v > \, d\sigma\,,$$

wobei $v : \partial A \to \mathbb{R}^n$ das äußere Einheitsnormalenvektorfeld ist.