Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2003/04

Analysis III

– Klausur –

Samstag, 21.2.2004, 9.15–11.45 Uhr, Hörsaal B, Chemie

Name ______________________________

Vorname ______________________________

Wichtig, bitte beachten:

1. Tragen Sie in das Deckblatt deutlich lesbar Ihren Namen ein.
2. Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern, weiteres Papier bei der Aufsicht.
3. Der Schreibblock darf nicht auseinander genommen werden.
4. Geben Sie stichpunktartig Begründungen für Ihre Schlüsse und Rechnungen an.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
Punkte	4	3,5	4	3	3	4	3	4,5	4	33
Erreicht										

Aufgabe 1 (4). Sei $\mathcal{V} := \{\varphi : X \to \mathbb{R} \,|\, \varphi \text{ konstant}\}$ und μ das Daniell-Integral auf $\mathcal{V}$ mit

$$\mu(\varphi) := \varphi(a)$$

für (irgend)ein $a \in X$. Zeigen Sie für $f \in \mathbb{R}^X$

$$\mu^*(f) = \sup |f|$$

und geben Sie $\mathscr{L}^1(X, \mu)$ an.

Aufgabe 2 (3,5). Zeigen Sie für $|x| < 1$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^4} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int\limits_0^1 x^{4k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k+1} \,.$$

Aufgabe 3 (4). Zeigen Sie, dass durch

$$F(y) := \int\limits_0^\infty e^{-x} \, \frac{1-\cos(xy)}{x} \, dx$$

eine Funktion $F \in C^1(\mathbb{R})$ definiert ist.

Aufgabe 4 (3). Sei $0 < r < R$ und

$$K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, r \leq \|(x,y)\| \leq R, \;\; 0 < y\}\,.$$

Zeigen Sie, dass

$$f : K \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto yx^2 + y^3$$

integrierbar ist und berechnen Sie

$$\int\limits_K f d\,\lambda^2.$$

Aufgabe 5 (3). Sei $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y \geq 0\}$ und

$$f : A \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \frac{1}{1+x^2} \; e^{-(x+y)}\,.$$

Ist $f \in \mathscr{L}^1(A)$?

Aufgabe 6 (4). Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und es gelte $f_k \to f$ in $\mathscr{L}^p(\mu)$ sowie $g_k \to g$ in $\mathscr{L}^q(\mu)$. Zeigen Sie $f_k\, g_k \to f\, g$ in $\mathscr{L}^1(\mu)$, also

$$\|f_k\, g_k - f g\|_1 \to 0\,.$$

Aufgabe 7 (3). Sei $f : [0,1] \to \mathbb{C}, \;\; x \mapsto e^{i\pi x}$. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten von f und zeigen Sie damit

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(1-2k)^2} = \frac{\pi^2}{4}\,.$$

Aufgabe 8 (4,5). Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$

$$e^{-|x|} = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x y} \cdot \frac{2}{1 + 4\pi^2 y^2} \; dy\,.$$

Aufgabe 9 (4). Berechnen Sie die Oberfläche des Zylinders

$$Z = \,]0,1[\, \times S^1(0) \subset \mathbb{R}^3\,.$$

(Zur Erinnerung: $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.)