Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2004

Übungen zur Mathematik II

— Blatt 7 —

Abgabe: Dienstag, 8.6.2004, 9 Uhr s.t., vor der Vorlesung.

Aufgabe 25 (4 Punkte). Sei $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, der *Sinus Hyperbolicus*.
Zeigen Sie: sinh ist bijektiv und für die Umkehrfunktion arsinh, *Area Sinus Hyperbolicus*, gilt:

$$\operatorname{arsinh}(y) = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}) \quad \text{für } y \in \mathbb{R}.$$

(Hinweis: Auflösen von $\ln(y + \sqrt{1 + y^2}) = x$ nach y.)

Aufgabe 26 (3 Punkte). Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für $a, b \in \,]0, \infty[$ und $x, y \in \mathbb{R}$:

a) $(a^x)^y = a^{xy}$

b) $(a^x)(b^x) = (ab)^x$

c) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

Aufgabe 27 (mündlich). Zeigen Sie die sogenannte Parallelogrammgleichung,

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\,|z|^2 + 2\,|w|^2$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$, und geben Sie eine geometrische Deutung.

Aufgabe 28 (5 Punkte).

a) Zeigen Sie: Ist $z \in \mathbb{C}$, so ist (z^n) eine Nullfolge im Fall $|z| < 1$, sowie (z^n) unbeschränkt, also divergent, im Fall $|z| > 1$.

b) Für $r > 0$ sei $z = \frac{1+i}{r}$. Berechnen Sie z^n für $n = 2, 3, 4, 5$ und skizzieren Sie z und diese Punkte für $r = 2$.

   Bestimmen Sie alle $r > 0$, für die (z^n) konvergiert.