

Übungen zur Mathematik II
— Blatt 9 —

Abgabe: Dienstag, 22.6.2004, 9 Uhr s.t., vor der Vorlesung.

Aufgabe 33 (4 Punkte). Die Semesterferien beginnen mit guten Vorsätzen: Die Studenten Leonhard E., Carl Friedrich G. und Sonja K. wollen endlich ihre Vorlesungen nacharbeiten. Dabei soll das Arbeitspensum jeden Tag um p Prozent gesteigert werden, man beginnt am nullten Tag vorsichtig mit einer Seite.

- L.E. will sich täglich um 1% steigern und fragt sich, wann er bei einem Tagespensum von zwei Blatt angelangt ist,
- C.F.G. möchte nach einem Jahr bei einem Tagespensum von 50 Seiten angelangt sein und
- S.K. plant in einem Jahr insgesamt 500 Seiten geschafft zu haben.

Helfen Sie den Kommilitonen, bei S.K. genügt eine Abschätzung. Berechnen Sie ferner, wann die von L.E. täglich beschriebene Papiermenge die Erdmasse erreicht hat.

(1 Blatt Papier 5g, Erdmasse $6 \cdot 10^{24}$ kg; für alle Rechnungen sind Exponentialfunktion, natürlicher Logarithmus und ein Taschenrechner zu verwenden).

Aufgabe 34 (3 Punkte). Zeigen Sie: Sind $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige, auf $]a, b[$ differenzierbare Funktionen mit $f(a) \geq g(a)$ und $f' \geq g'$ auf $]a, b[$. Dann gilt $f \geq g$ auf $[a, b]$. Ist $f' > g'$ auf $]a, b[$, so gilt auch $f > g$ auf $]a, b[$. Beweisen Sie als Anwendung

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1 \quad \text{für } x > 1$$

und skizzieren Sie die drei Funktionsgraphen.

Aufgabe 35 (5 Punkte). Sei $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto (x^2 - x) \cdot \ln x + \frac{x}{2}$.

- Bestimmen Sie Lage und Art der lokalen Extrema von f sowie die Bildmenge $f(]0, \infty[)$.
- Zeigen Sie, dass genau ein $c > 0$ existiert mit $f|_{]0, c[}$ ist konkav, $f|_{]c, \infty[}$ ist konvex.
- Skizzieren Sie den Graphen von f .

Aufgabe 36 (mündlich). Untersuchen Sie die folgenden Grenzwerte auf Existenz und berechnen Sie diese gegebenenfalls

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$,

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$, $a \in \mathbb{R}$.