

Übungen zur Mathematik II
— Blatt 10 —

Abgabe: Dienstag, 29.6.2004, 9 Uhr s.t., vor der Vorlesung.

Aufgabe 37 (4 Punkte). Sei

$$\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\chi \in C^2(\mathbb{R})$ ist.

Skizzieren Sie für $\varepsilon = 2, 1, \frac{1}{2}$ die Funktion $\chi_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{\varepsilon} \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

Aufgabe 38 (4 Punkte). Sei $f :]-1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{2}}$.

Berechnen Sie für $n = 0, 1, 2, 3$ das n -te Taylorpolynom T_0^n von f in 0 und zeigen Sie:

Für $x \geq 0$ existiert ein $\alpha < 0$ mit $0 \geq (1+x)^{\frac{1}{2}} - T_0^3(x) \geq \alpha \cdot x^4$.

Geben Sie α konkret an.

Aufgabe 39 (mündlich). Berechnen Sie für $|x| < 1$ die Summe der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k x^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}.$$

Aufgabe 40 (4 Punkte). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3 - x^2 - 2x - 1$.

- Bestimmen Sie ein Intervall I auf dem die Voraussetzungen des Newtonverfahrens (Satz 6.34) gelten.
- Berechnen Sie mit einem geeigneten Startwert x_0 die Iterationswerte x_1, x_2, x_3 aus dem Newtonverfahren und geben Sie für die Nullstelle c eine Abschätzung von $|x_3 - c|$ an.