Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2004/05

Übungen zur Mathematik III

– Blatt 3 –

Abgabe: Montag, 8.11.2004, 9 Uhr s.t.

Aufgabe 9 (mündlich). Zeigen Sie mit Hilfe der Exponentialdarstellung von $\cos_k$ und $\sin_k$ eine der folgenden Orthogonalitätsrelationen:

$$
\begin{array}{lll}
\langle \cos_k \,|\, \cos_j \rangle_{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}\,\delta_{k,j}, & k \geq 0,\ j \geq 0,\ k+j \neq 0, & \langle \cos_0 \,|\, \cos_0 \rangle_{\mathcal{P}} = 1, \\
\langle \sin_k \,|\, \sin_j \rangle_{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}\,\delta_{k,j}, & k > 0,\ j > 0, & \\
\langle \cos_k \,|\, \sin_j \rangle_{\mathcal{P}} = 0, & k \geq 0,\ j > 0. &
\end{array}
$$

Begründen Sie damit, dass für ein trigonometrisches Polynom

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos_k + b_k \sin_k)$$

die Koeffizienten die Fourierkoeffizienten sind, das heißt

$$a_j = 2\,\langle f | \cos_j \rangle \quad \text{für} \quad j = 0, 1, \ldots, n, \qquad b_j = 2\,\langle f | \sin_j \rangle \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, n.$$

Aufgabe 10 (5 Punkte). Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten a_k und b_k der Funktionen, die gegeben sind als 1-periodische Fortsetzung von

$$\text{a) } x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{1}{2}[\\ -1 & x \in [\frac{1}{2}, 1[\end{cases} \qquad \text{und} \qquad \text{b) } x \mapsto x^2, \quad x \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}].$$

Für welche dieser Funktionen f konvergiert die Fourierreihe in x gleichmäßig gegen $f(x)$?

Aufgabe 11 (3 Punkte). Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1-periodisch und stetig differenzierbar. Begründen Sie die folgende Abschätzung für die Fourierkoeffizienten c_k von f:

$$|c_k| \;\leq\; \frac{\|f'\|_\infty}{|2\pi k|} \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\,.$$

Aufgabe 12 (4 Punkte).

a) Berechnen Sie für die logarithmische Spirale

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \;\; t \mapsto \begin{pmatrix} r^t \cos 2\pi t \\ r^t \sin 2\pi t \end{pmatrix} \quad (\text{mit } r > 1)$$

die Ableitung $\varphi'(t)$ und die Punkte t, für die $\varphi_2'(t) = 0$ gilt.

b) Auf welcher einfachen Kurve liegen alle diese Punkte $\varphi(t)$ mit $\varphi_2'(t) = 0$?

Klausur Samstag, 5.2.2004, 10-13 Uhr, HS A, Hörsaalgebäude Chemie.