Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2004/05

Übungen zur Mathematik III

– Blatt 5 –

Abgabe: Montag, 22.11.2004, 9 Uhr s.t.

Aufgabe 17 (3 Punkte). Sind $Q_0, \ldots, Q_N$ Punkte im $\mathbb{R}^m$, so heißt

$$\mathrm{Co}(Q_0, \ldots, Q_N) := \Big\{ \sum_{j=0}^{N} \alpha_j Q_j \;\Big|\; \alpha_j \geq 0\,,\ \sum_{j=0}^{N} \alpha_j = 1 \Big\}$$

die *konvexe Hülle* von $Q_0, \ldots, Q_N$. Zeigen Sie:

a) Sind $P, Q \in \mathrm{Co}(Q_0, \ldots, Q_N)$, so ist auch die Verbindungsstrecke

$$[P,Q] \quad \big(:= \big\{ (1-t)P + t\,Q \;\big|\; t \in [0,1] \big\} \big) \ \subset\ \mathrm{Co}(Q_0, \ldots, Q_n)\,.$$

b) Ist φ die Bezier-Kurve zu $Q_0, \ldots, Q_3 \in \mathbb{R}^2$, so ist $\varphi(t) \in \mathrm{Co}(Q_0, \ldots, Q_3)$ für alle $t \in [0,1]$.

Aufgabe 18 (5 Punkte). Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad , & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Zeigen Sie: Die Höhenlinie $H_c = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; f(x,y) = c \big\}$ ist nichtleer, genau wenn $c \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ gilt, und jede Höhenlinie für $c \neq 0$ ist von der Form $\big\{ t \cdot v \;\big|\; t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \big\}$ für ein $v \in \mathbb{R}^2$.

b) Skizzieren Sie einige Höhenlinien von f (mit den zugehörigen Parameterwerten c).

c) Zeigen Sie, dass f im Nullpunkt unstetig ist.

Aufgabe 19 (mündlich). Zeigen Sie: Ist $f : D \to \mathbb{R}$ im Punkt $a \in D$ in Richtung v differenzierbar, so auch in Richtung $-v$ und es gilt $\partial_{-v} f(a) = -\partial_v f(a)$.

Aufgabe 20 (4 Punkte). Zeigen Sie für die Normfunktion im $\mathbb{R}^n$,

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\| = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big)^{\frac{1}{2}} :$$

a) Ist $x = 0$, so existiert für kein $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ die Richtungsableitung $\partial_v f(0)$.

b) Ist $x \neq 0$, so existiert für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ die Richtungsableitung $\partial_v f(x)$ und es gilt

$$\partial_v f(x) = \frac{\langle x \,|\, v \rangle}{\|x\|}.$$

Bestimmen Sie zu x das v, so dass $\partial_v f(x)$ maximal ist.

c) Skizzieren Sie im Fall $n = 1$ und $n = 2$ die Funktionsgraphen von f.