Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2004/05

Übungen zur Mathematik III

– Blatt 6 –

Abgabe: Montag, 29.11.2004, 9 Uhr s.t.

Aufgabe 21 (4 Punkte). Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 - y^2$. Zeigen Sie:

a) Die Sattelfläche Graph(f) ist eine *Regelfläche*, das heißt durch jeden Punkt $\binom{a}{f(a)} \in$ Graph(f) gibt es zwei verschiedene Geraden, die ganz in Graph(f) liegen, nämlich

$$g_\pm := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ f(a_1,a_2) \end{pmatrix} + \mathbb{R}\, v_\pm\,, \quad v_\pm := \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \\ 2a_1 \mp 2a_2 \end{pmatrix}.$$

b) Die beiden Geraden sind auch tangential, das heißt

$$g_+,\, g_- \subset \binom{a}{f(a)} + T_a f.$$

Aufgabe 22 (5 Punkte). Auf $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; R - r < \sqrt{x^2+y^2} < R + r\right\}$ mit $0 < r < R$ sei

$$f : D \to \mathbb{R}\,, \quad (x,y) \mapsto \left(r^2 - (R - \sqrt{x^2+y^2})^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

a) Berechnen Sie alle Punkte $a \in D$, für die die Normale $N_a f = \mathbb{R}\cdot e_3$ ist, und begründen Sie, dass für diese a stets $f(a)$ maximal ist.

b) Skizzieren Sie Graph(f).

Aufgabe 23 (mündlich). Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel folgenden Mittelwertsatz im $\mathbb{R}^n$: Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(D)$ und $a, b \in D$, so dass die Verbindungsstrecke

$$[a,b] = \left\{a + t(b-a) \;\middle|\; t \in [0,1]\right\}$$

in D liegt, dann existiert ein $c \in [a,b]$ mit

$$f(b) - f(a) = \partial f(c) \cdot (b-a).$$

Aufgabe 24 (3 Punkte). Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \;\mapsto\; \begin{cases} \dfrac{y^5}{2x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Zeigen Sie:

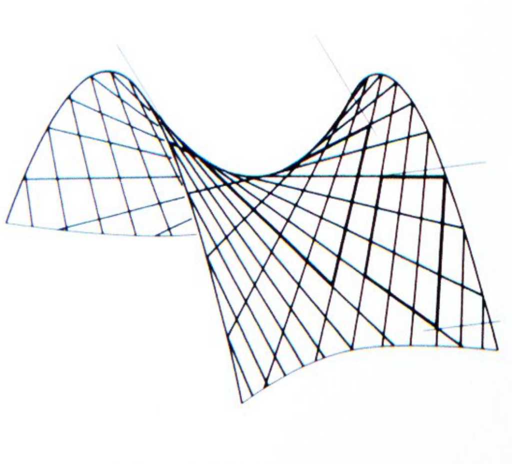
a) f ist stetig im Nullpunkt und alle Richtungsableitungen $\partial_v f(0,0)$ existieren. Berechnen Sie diese.

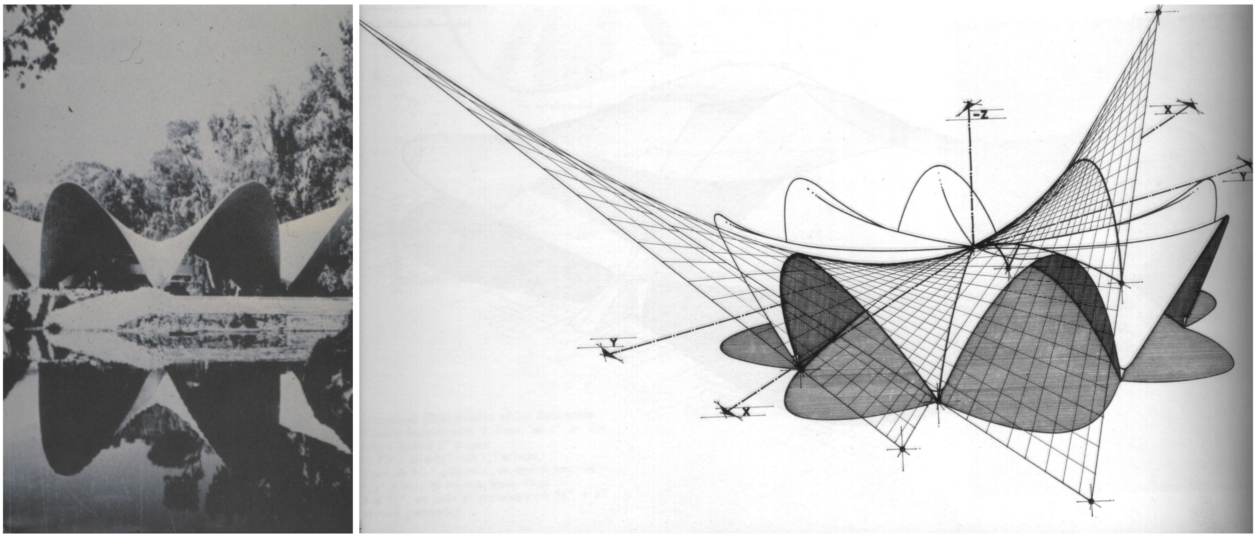
b) Ist $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \binom{t}{t}$, so ist $f \circ \varphi$ differenzierbar, aber es gilt *nicht* die Formel der Kettenregel, also

$$(f \circ \varphi)'(0) \neq \partial f(\varphi(0)) \cdot \varphi'(0).$$

Sattelfläche oder hyperbolischer Paraboloid

Die Eigenschaft der Sattelfläche (Aufgabe 21), eine Regelfläche zu sein, hat in der Architektur eine Anwendung bei der Konstruktion von geschwungenen Dachflächen. Dabei werden Verschalungen hergestellt, indem ein Netz von Geraden, welche ganz in der Fläche verlaufen, durch Leisten aufgebaut wird, oder aber bei dünnen Gebilden ein entlang solcher Geraden gespanntes Stahl-Netz mit Beton von oben und unten eingespritzt wird.





Felix Candela, Xochimilco Restaurant, Mexico City, 1958.