Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Wintersemester 2004/05

Übungen zur Mathematik III

– Blatt 7 –

Abgabe: Montag, 6.12.2004, 9 Uhr s.t.

Aufgabe 25 (4 Punkte). Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2y + 2x^2 - y + y^2 \cos x$.

a) Berechnen Sie für $a = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ die Ableitung $\partial f(a)$ und die Hesse-Matrix $\partial^2 f(a)$.

b) Geben Sie speziell für $a = (0, 0)$ das Taylorpolynom $T_a^2(f)$ an und lesen Sie ab, bis zu welcher Ordnung Terme reproduziert werden.

Aufgabe 26 (3 Punkte). Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^4 + x^2 - 2x^2y + y^2 .$$

Aufgabe 27 (5 Punkte). Sei $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein Polynom mit Grad $p \leq 2$,

$$p(x, y) = c_0 + c_1\, x + c_2\, y + c_{11}\, x^2 + c_{12}\, xy + c_{22}\, y^2 .$$

a) Berechnen Sie $\partial p(x, y)$ und $\partial^2 p(x, y)$.

b) Zeigen Sie: Ist $\partial^2 p(x, y)$ positiv definit in einem Punkt (x, y), so hat p genau ein lokales Minimum.

c) Formulieren und zeigen Sie die entsprechende Aussage in b), wenn $\partial^2 p(x, y)$ negativ definit bzw. indefinit ist.

Aufgabe 28 (mündlich). Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ rotationssymmetrisch, das heißt, es existiert eine Funktion $g \in C^1([0, \infty[\,, \mathbb{R})$ mit $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Begründen Sie, dass f in keinem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ein lokales isoliertes Extremum hat.

b) Zeigen Sie: Ist $g \in C^2$ und $(x, y) \neq (0, 0)$ mit $\partial f(x, y) = 0$, so ist $\partial^2 f(x, y)$ nicht definit, d.h. weder positiv, negativ noch indefinit.

Aufgabe 29 (5 Zusatzpunkte). In schon etwas vorgerückter Feststimmung beschließen die drei Kinder einer Familie, das letzte Geschenk, eine zu allerhand Spekulationen Anlass gebende kegelförmige Wundertüte $K_w = \text{Graph}\,(f)$ mit

$$f(x,y) = 2(1 - \sqrt{x^2 + y^2}), \quad x^2 + y^2 \leq 1,$$

durch Erdnusszielwurf zu verteilen. Die Erdnuss E_1 des ersten Werfers bleibt an der Teppichkante liegen, $E_1 = (5,3,0)$, die zweite $E_2 = (3,4,\frac{5}{2})$ landet auf dem Tisch zwischen Geschenkpapier und Keksen, und $E_3 = (1,1,\frac{13}{2})$ bleibt im überraschend dichten Geäst des Weihnachtsbaumes hängen. Der nachfolgende Streit, wer nun am nächsten an K_w ist, droht den Festfrieden zu stören. Wer hilft schlichten? Etwa durch Berechnen von

$$d_j^2 = \min\big\{ \|E_j - P\|^2 \;\big|\; P \in K_w \big\}.$$

Das Knacken dieser Weihnachtsnuss wird mit fünf Zusatzpunkten belohnt.