

Übungen zur Mathematik III

– Blatt 14 –

Abgabe: Montag, 31.1.2005, 9 Uhr s.t.

Aufgabe 51 (3 Punkte). Eine Verteilung heißt *gedächtnislos*, wenn für alle $x, t > 0$ mit $P(X > t) > 0$ folgende Aussage für die bedingte Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P((X > x + t)|(X > t)) = P(X > x).$$

- Zeigen Sie, dass die Exponentialverteilung gedächtnislos ist. (Umgekehrt charakterisiert diese Eigenschaft schon die Exponentialverteilung.)
- Geben Sie eine Interpretation, z.B. am Modell der Lebenszeit eines Gerätes.

Aufgabe 52 (3 Punkte). Zeigen Sie, dass für eine kontinuierliche Zufallsvariable X und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X).$$

Änderung. Finden Sie für $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ die Verteilungsfunktion und Dichte zu $aX + b$ und zeigen Sie damit

$$E(aX + b) = aEX + b.$$

(Damit lässt sich dann die obige Formel nachrechnen. Gleiches gilt auch für $a = 0$ und $a < 0$. Wie?)

Aufgabe 53 (5 Punkte). Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Verteilungsfunktion zu einer Dichte f und X eine Zufallsvariable zur Dichte f . Für $\alpha \in]0, 1[$ sei $q_\alpha \in \mathbb{R}$ ein α -Quantil von X , wenn $P(X \leq q_\alpha) \geq \alpha$ und $P(X \geq q_\alpha) \geq 1 - \alpha$ ist. Dann heißt $q_{\frac{1}{2}}$ ein Median.

- Begründen Sie, dass für alle $\alpha \in]0, 1[$ das q_α -Quantil existiert.
- Bestimmen Sie für die Zufallsvariable $-X$ Dichte und Verteilungsfunktion und zeigen Sie: $-q_\alpha$ ist $(1 - \alpha)$ -Quantil von $-X$.
- Berechnen Sie für die Exponentialverteilung die Quantile q_α und vergleichen Sie den Median $q_{\frac{1}{2}}$ mit dem Erwartungswert.

Aufgabe 54 (mündlich). Ein Statistiker hat zwei Freundinnen, zwischen denen er sich nicht entscheiden kann. Beide erreicht er von der gleichen Haltestelle mit zwei verschiedenen Buslinien, die beide im 10-Minuten Takt fahren. Der Statistiker überlässt nun seine Herzensangelegenheiten dem Zufall: Er geht zu einer zufälligen Zeit zur Haltestelle und nimmt den ersten passenden Bus.

Als ordentlicher (aber möglicherweise nicht sehr kluger) Mensch führt er gewissenhaft Buch, und stellt zu seiner Überraschung nach einem Jahr fest, dass er Freundin A annähernd viermal so oft besucht hat wie B . Wie kam es dazu?