Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2005

Übungen zur Funktionalanalysis

– Blatt 1 –

Abgabe Montag, 25.4.2005, 14 Uhr

Aufgabe 1 (3 Punkte). Sei $k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und

$$C^k([a,b]) = \big\{ f : \ [a,b] \to \mathbb{K} \bigm| f \text{ ist } k\text{-mal stetig differenzierbar} \big\} ,$$

$\partial^j f = f^{(j)}$ sei die j-te Ableitung von f. Zeigen Sie:

$$C^k([a,b]) \ni f \ \mapsto \ \sum_{j=0}^{k} \big\| \partial^j f \big\|_\infty =: \|f\|_{\infty,k}$$

ist eine Norm auf $C^k([a,b])$ und $C^k([a,b])$ ist damit ein Banachraum.

Aufgabe 2 (mündlich). Sei E ein unendlich-dimensionaler normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer (algebraischen) Basis $\mathcal{B} = (v_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Zeigen Sie: Es gibt eine unstetige lineare Abbildung $\eta : E \to \mathbb{K}$.

Aufgabe 3 (6 Punkte). Im Folgenden sei $C\big([0,1]\big) =: C$ und $C^1\big([0,1]\big) =: C^1$.

a) Es sei
$$\partial : C^1 \to C, \ f \mapsto \partial f := f' .$$
Untersuchen Sie ∂ auf Stetigkeit als Abbildung
   i) $(C^1, \|\,.\,\|_{\infty,1}) \to (C, \|\,.\,\|_\infty)$,
   ii) $(C^1, \|\,.\,\|_\infty) \to (C, \|\,.\,\|_\infty)$.

b) Zeigen Sie, dass die Identität $f \mapsto f$
   i) als Abbildung $(C, \|\,.\,\|_\infty) \to (C, \|\,.\,\|_1)$ stetig ist, aber
   ii) als Abbildung $(C, \|\,.\,\|_1) \to (C, \|\,.\,\|_\infty)$ unstetig ist.

c) Bestimmen Sie für die stetigen Abbildungen in a) und b) jeweils die Operatornorm.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Beweisen Sie, dass ein normierter Raum $(X, \|\,.\,\|)$ genau dann vollständig ist, wenn gilt:

Für jede Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \|x_j\| < \infty$ gibt es ein $x \in X$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=0}^{k} x_j = x$.