Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes Sommersemester 2005

Übungen zur Funktionalanalysis

– Blatt 2 –

Abgabe Montag, 2.5.2005, 14 Uhr

Aufgabe 5 (4 Punkte). Sei p eine Halbnorm auf E und $N := \{x \in E \mid p(x) = 0\}$. Zeigen Sie:

a) N ist ein Untervektorraum von E und auf E/N ist durch

$$\|\cdot\|_p : \; E/N \to \mathbb{R}_+, \quad x + N \mapsto p(x)$$

eine Norm definiert.

b) Ist (E, p) vollständig, d.h. zu jeder p-Cauchy-Folge $(x_j) \subset E$ existiert ein $x^* \in E$ mit $p(x_j - x^*) \to 0$, so ist $(E/N, \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum.

Aufgabe 6 (4 Punkte). Geben Sie für die folgenden Banachräume E jeweils eine Folge (x_j) in der Einheitskugel $B_1 = \{x \in E \mid \|\cdot\|\, x \leq 1\}$ an, die keine konvergente Teilfolge hat:

a) $\ell^p(\mathbb{Z}),\ 1 \leq p \leq \infty$, b) $L^p(\mathbb{R}, \lambda),\ 1 \leq p \leq \infty$, c) $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

Aufgabe 7 (mündlich). Für einen $\mathbb{K}$-Vektorraum E sei $E^* = \mathrm{Hom}(E, \mathbb{K})$ der algebraische Dualraum. Zeigen Sie für $\eta \in E^*$:

a) Für jedes $x \in E$ mit $\eta(x) \neq 0$ ist

$$E = \mathrm{Kern}\,\eta \oplus \mathbb{K}x\,.$$

b) Ist E normiert, so gilt

$$\eta \in E' \iff \mathrm{Kern}\,\eta \subset E \text{ abgeschlossen.}$$

Aufgabe 8 (4 Punkte). Sei $H = C_c(]0,1[)$ und

$$H \times H \ni (f, g) \longmapsto \int_0^1 f(t)\,\overline{g(t)}\,dt =: \langle f \,|\, g \rangle.$$

Zeigen Sie:

a) H ist mit dieser Abbildung ein Prä-Hilbertraum, H ist unvollständig.

b) Folgende Menge M ist abgeschlossene Hyperebene in H mit $M^\perp = \{0\}$:

$$M = \left\{ f \in H \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \right\}.$$