Fachbereich Mathematik und Informatik — Sommersemester 2005
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Übungen zur Funktionalanalysis
– Blatt 3 –
Abgabe Montag, 9.5.2005, 14 Uhr

Aufgabe 9 (mündlich).

a) Im Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{N})$ sei $c_c(\mathbb{N})$ der Untervektorraum der finiten Folgen,
$$c_c(\mathbb{N}) = \big\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \;\big|\; \operatorname{supp} f \text{ kompakt} \big\} .$$
Zeigen Sie:

- $c_c(\mathbb{N})$ ist dicht in $\ell^2(\mathbb{N})$, d.h. $\overline{c_c(\mathbb{N})} = \ell^2(\mathbb{N})$,
- $\operatorname{codim} c_c(\mathbb{N}) = \infty$.

b) Geben Sie ein Beispiel eines Hilbertraumes H und eines nicht abgeschlossenen Untervektorraumes M an, so dass $\overline{M} \subsetneq H$.

Aufgabe 10 (5 Punkte). Sei $H = L^2([0,1])$ mit der ONB $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $e_k = e^{2\pi i k(\,\cdot\,)}$.

a) Sei $f = \mathrm{id}_{[0,1]}$. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten $\langle f \,|\, e_k \rangle$ und zeigen Sie damit
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

b) Sei $f \in H$ mit $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f \,|\, e_k \rangle| < \infty$. Zeigen Sie: Es ist $f \in C([0,1])$ mit $f(0) = f(1)$ und in $\big(C([0,1]), \|\,\cdot\,\|_\infty\big)$ gilt
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f \,|\, e_k \rangle e_k = f .$$

Aufgabe 11 (3 Punkte). Sei H ein Hilbertraum, $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine ONB und $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ein ONS in H mit
$$\sum_{j=0}^{\infty} \|y_j - z_j\|^2 < 1.$$
Zeigen Sie, dass (z_j) ebenfalls ONB von H ist.

Aufgabe 12 (4 Punkte). Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $e_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{i\lambda t}$ und sei H der von diesen Funktionen (linear) erzeugte Prä-Hilbertraum, $H := \operatorname{Span}\big\{ e_\lambda \;\big|\; \lambda \in \mathbb{R} \big\}$. Zeigen Sie:

a) Die Abbildung
$$H \times H \ni (f,g) \mapsto \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\overline{g(t)}\,dt$$
ist ein Skalarprodukt auf H.

b) $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ ist ein maximales ONS in H.