Fachbereich Mathematik und Informatik
Universität Marburg
Prof. Dr. W. Gromes

Sommersemester 2005

Übungen zur Funktionalanalysis

– Blatt 4 –

Abgabe Donnerstag, 19.5.2005, 14 Uhr

Aufgabe 13 (6 Punkte). Für $f : [-1,1] \to \mathbb{K}$ sei

$$\check{f} : [-1,1] \to \mathbb{K},\ \check{f}(x) = f(-x)$$

und es seien

$$L^2_{g/u}([-1,1]) := \left\{ f \in L^2([-1,1]) \;\middle|\; f = \pm \check{f} \right\}$$

der Raum der geraden bzw. ungeraden L^2-Funktionen auf $[-1,1]$. Zeigen Sie:

a) $L^2([-1,1])$ ist die orthogonale Summe von $L^2_g([-1,1])$ und $L^2_u([-1,1])$.

b) Folgende Abbildungen sind Norm-Isomorphismen:

$$T_\pm : L^2_{g/u}([-1,1]) \to L^2([0,1]),\ f \mapsto f\big|_{[0,1]} \cdot \sqrt{2},$$
$$S : L^2([0,1]) \to L^2([-1,1]),\ f \mapsto f\big((\,\boldsymbol{.}\, + 1)/2\big)/\sqrt{2}.$$

c) Die Systeme $\left\{ \sqrt{2}\sin(k\pi\,\boldsymbol{.}\,) \;\middle|\; k \geq 1 \right\}$ und $\left\{ 1, \sqrt{2}\cos(k\pi\,\boldsymbol{.}\,) \;\middle|\; k \geq 1 \right\}$ sind jeweils ONB von $L^2([0,1])$.

d) Für $f \in C^1([0,1])$ mit $f(0) = f(1) = 0$ ist

$$\|f\|_2 \leq \frac{1}{\pi}\, \|f'\|_2 \,.$$

Für welche solcher f gilt Gleichheit? (Hinweis: Parsevalgleichung)

Aufgabe 14 (4 Punkte). Sei $H \neq \{0\}$ ein Hilbertraum. Zeigen Sie (per Zorn-Lemma):

a) Jedes ONS $S \subset H$ lässt sich zu einer ONB fortsetzen.

b) (mündlich) Ist $M \subset H$ dichter UVR, so enthält M eine ONB von H.

Nachträgliche Anmerkung. Der Aufgabenteil b) ist falsch. In den Lösungen ist vorgeführt, dass b) nicht wie gedacht durch Verallgemeinerung von a) zu erhalten ist. Zudem zeigt Dixmier[1], dass jeder nicht-separable Prähilbertraum keine ONB besitzen kann.

Lemma von Zorn. Ist $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ eine nichtleere Menge von Teilmengen, so enthält $\mathcal{M}$ eine maximale Kette $\mathcal{K}$.

Dabei heißt $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ *Kette*, wenn für alle $A, B \in \mathcal{K}$ stets $A \subset B$ oder $B \subset A$ gilt. Und eine Kette $\mathcal{K}$ in $\mathcal{M}$ heißt *maximal*, wenn für jede Kette $\mathcal{K}'$ in $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}'$ schon $\mathcal{K} = \mathcal{K}'$ ist.

[1] J. Dixmier, *Acta Scientarum Mathematicarum* **15**, 1953.

Aufgabe 15 (3 Punkte). Zeigen Sie: $\ell^\infty(\mathbb{N})$ ist nicht separabel.

Aufgabe 16 (4 Punkte). Es seien $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Eins $e \neq 0$ und $a, b \in \mathcal{A}$. Beweisen Sie:

a) Ist $e - ab$ invertierbar, so ist auch $e - ba$ invertierbar und es gilt

$$(e - ba)^{-1} = e + b(e - ab)^{-1}\, a\,.$$

b) $\rho(ab) \setminus \{0\} = \rho(ba) \setminus \{0\}$.

c) Geben Sie ein Beispiel dafür, dass $\rho(ab) \neq \rho(ba)$ ist.

Aufgabe 17 (3 Punkte). Sei M ein abgeschlossener, echter Untervektorraum eines Hilbertraumes H. Zeigen Sie, dass für die orthogonale Projektion P_M gilt

$$\sigma(P_M) = \sigma_P(P_M) = \{0, 1\}\,.$$